القسم العلمى

تطبيقات الرياضيات

كتاب الطالب

الصف الثانى الثانوى

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

مراجعة وتعديل

د/ محمد محي الدين عبد السلام

أ/ شريف عاطف البرهامي

أ/ ماجد محمد حسن

أ/عثمان مصطفى عثمان

أ/ أحمد إبراهيم الدسوقي

إشراف علمى

مستشار الرياضيات

أ/ منال عزقول

إشراف تربوى

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

د/ أكرم حسن





٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « تطبيقات الرياضيات» للصف الثانى الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « تطبيقات الرياضيات » مايلى:

★ تقسيم الكتاب إلى ثلاثة أجزاء الميكانيكا - الهندسة والقياس - الاحتمال، وكل جزء مقسم إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضِّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا. ٢

الاستاتيكا

الوحدة الأولى

١ - ١ القـــوى. ١٢

١ - ٢ تحليل القوى. ٢٠

١ - ٣ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة. ٢٦

١ - ٤ اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة. ٣١

١ - ٥ اتزان جسم على مستوى أفقى خشن. ٤٢

١ - ٦ اتزان جسم على مستوى مائل خشن. ٥٠

الهندسة والقياس

الوحدة الثانية

٢ - ١ المستقيمات والمستويات فى الفراغ. ٥٨

٢ - ٢ الهرم والمخروط. ٦٤

٢ - ٣ المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط. ٦٩

٢ - ٤ حجم الهرم والمخروط القائم. ٧٣

٢ - ٥ معادلة الدائرة ٧٨

الميكانيكا

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا

الميكانيكا بالمفهوم العام هو العلم الذى يقوم بدراسة حركة أو اتزان الأجسام المادية، وذلك باستخدام القوانين الخاصة بها، فمثلًا هناك قوانين تَسري على دوران الأرض حول الشمس وإطلاق الصواريخ أو قذيفة المدفع أو غير ذلك. ويقصد بها التغير الذى يَحدث بمرور الزمن لمواضع الأجسام المادية فى الفراغ، والتأثير الميكانيكى المتبادل بين الأجسام هو التأثير الذى تتغير له حركة هذه الأجسام، طبقًا لتأثيرات القوى المختلفة عليها ، لذلك فإن المسألة الأساسية فى الميكانيكا هى دراسة القوانين العامة لحركة واتزان الأجسام المادية تحت تأثير القوى عليها.
ويمكن تقسيم الميكانيكا إلى قسمين هما:

الإستاتيكا[1] *Statics*

(**علم توازن الأجسام**) يبحث فى سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من المؤثرات تُسمى القوى ، وتوصف القوى التى لا تُغير من حالة الجسم بأنها متزنة، ويقال للجسم: إنه فى حالة توازن تحت تأثير هذه القوى.
وقد بدأت الدراسة العامة لاتزان الأجسام (الإستاتيكا) فى العصور القديمة نتيجة لمتطلبات الإنتاج البسيطة فى هذا الوقت (كالرافعة والبوابة والمستوى المائل وغيرها) وكان لمؤلفات أرشميدس دور مهم فى هذا الوقت لترسيخ علم الإستاتيكا.

الديناميكا[2] *Dynamics*

(**علم حركة الأجسام**) والتى تتضمن قوانين حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى ، وتنقسم الديناميكا إلى:
الكينماتيكا *Kinematics* وهى تبحث فى خصائص الحركة من الوجهة الهندسية (وصف الحركة وصفًا مجردًا دون التعرض للقوى المسببة لها)، و**الكيناتيكا** *Kinetics* وهى تبحث فى تأثير القوى المسببة أو المغيرة للحركة، وقد تلت الديناميكا فى دراستها الإستاتيكا بأمد طويل؛ نتيجة النهضة فى مجالات النقل والتجارة والصناعة والإنتاج وصناعة الأسلحة والاكتشافات الفلكية.

وهناك:

ميكانيكا النقطة المادية (أى الجسم الذى يمكن إهمال أبعاده عند بحث حركته أو اتزانه).

ميكانيكا الجسم الجاسئ *Rigid Body* (أى الجسم المكون من عدد كبير جدًّا من الجسيمات المترابطة مع بعضها البعض؛ بحيث إن المسافة بين أي جسيمين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي مؤثر خارجي).

ميكانيكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة (توجد لبعض الأنظمة والأجسام تَغيرات تَطرأ عليها تتغيَّر فيها الكتلة

[1] سوف ندرس فى هذا الكتاب مفهوم القوة وخواصها ووحدات قياسها وتحليل القوة إلى مركبتين، وإيجاد محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة ، ثم دراسة اتزان نقطة مادية تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة، وتطبيقات عليها والاحتكاك ومعامل الاحتكاك.

[2] سوف ندرس فى هذا الكتاب (الكينماتيكا) وهى التى تختص بوصف حركة الأجسام دون التعرض للقوى المسببة لها، وتتناول هذه الدراسة حركة الأجسام، والظواهر المصاحبة لهذه الحركة، ومسببات الحركة وقوانينها، وتطبيقات على الحركة الأفقية والرأسية بعجلة منتظمة، وقوانين نيوتن.

بتغير الزمن كأن يَنفصل عنها أو يتحد بها جُسيمات تَنقص أو تَزيد من كتلتها فى أثناء الحركة، ومن هذه الأجسام الصواريخ النفاثة وعربات المناجم التى تَتغير كتلتها نتيجة استهلاك الوقودِ وغيرها من الأنظمة المختلفة).

ميكانيكا الأجسام القابلة للتشكيل (المرونة Elasticity) هى خاصية الأجسام التى لها القدرة على الرجوع إلى شكلها و أبعادها الأصلية بعد تشكيلها، أما اللدونة Plasticity وهي عند تَعرُّض الأجسام إلى مؤثرات خارجية تتغير أشكالها ولا تعود إلى حالتها الطبيعية عند زوال المؤثِّر الخارجي.

تطور علم الميكانيكا:

الميكانيكا الكلاسيكية *Classical machanics*

تعد أقدم فروع الميكانيكا حيث تهتم بدراسة القوى التى تؤثر على الأجسام ، كما تهتم بتفسير حركة الكواكب وتساعد كذلك فى العديد من التقنيات الحديثة (الهندسة الإنشائية والهندسة المدنية والملاحظة الفضائية ...).

ميكانيكا الكم *Quantum mechanics*

هي مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت فى القرن العشرين، وذلك لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات، وقد دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية ليظهر مصطلح ازدواجية (الموجة – الجسيم) ، وبهذا تُصبح ميكانيكا الكم مسئولة عن التفسير الفيزيائي على المستوى الذري، لذلك ميكانيكا الكم هي تعميم للفيزياء الكلاسيكية لإمكانية تطبيقها على المستويين الذري والعادي، وسبب تسميتها بميكانيكا الكم يعود إلى أهميّة الكم فى بنائها (وهو مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمّية من الطاقة يُمكن تَبادلها بين الجسيمات، ويُستخدم للإشارة إلى كميات الطاقة المحددة التي تَنبعث بشكلٍ متقطعٍ، وليس بشكلٍ مُستمر).

ميكانيكا الموائع *Fluid* Mechanics

هى أحد فروع ميكانيكا الكم وهي تدرس أساسًا الموائع (السوائل والغازات)، ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائى لهذه المواد، وتنقسم إلى إستاتيكا الموائع ودراستها فى حالة عدم الحركة وديناميكا الموائع ودراستها فى حالة الحركة

الميكانيكا الحيوية *Biomechanics:*

علم الميكانيكا الحيوية (البيوميكانيك) هو علم دراسة القوانين العامة فى حركة أى كائن حى والتحليل الميكانيكي لحركة الأجسام الحية من جميع النواحى (التشريحية - الفسيولوجية - البدنية - الميكانيكية ...)، والذى يتعامل مع القوة على الأجسام الحية سواء كانت فى حالة السكون أو الحركة، ومن أمثلة ذلك : حركة الأمعاء، وتدفق الدم فى الشرايين، وانتقال البويضة فى قناة فالوب، وانتقال السوائل فى الحالب من الكلية إلى المثانة، وعملية هضم الطعام وحركته، ومن خلال التحليل الميكانيكي يمكن التوصل إلى حالات جديدة وملائمة لتطوير مستوى الأداء.

النظرية النسبية العامة *General relativity theory*

النظرية النسبية لأينشتاين غيّرت الكثير من المفاهيم فيما يتعلق بالمصطلحات الأساسية فى الفيزياء: المكان، الزمان الكتلة والطاقة؛ حيث أحدثت نقلة نوعية فى الفيزياء النظرية وفيزياء الفضاء فى القرن العشرين.
قامت نظرية النسبية بتحويل مفهوم الحركة، حيث نَصَّت بأنَّ كل الحركة نسبية. ومفهوم الوقت تَغير من كونه ثابتًا ومحددًا، إلى كونه بُعدًا آخر غير مكاني. وجعلت الزمان والمكان شيئًا موحدًا بعد أن كان يتم التعامل معهما كشيئين مختلفين. وجعلت مفهوم الوقت يتوقَّف على سرعة الأجسام، وأصبح تقلص البعد وتَمدُّد الزمن مفهومًا أساسيًّا لفهم الكون.وبذلك تَغيرت كل الفيزياء الكلاسيكية النيوتونية.



١ - استخدم الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) فى البحث عن دور علماء الرياضيات فى تطور علم الميكانيكا وإليك بعض نتائج البحث:

كان للعالم الإنجليزى **إسحق نيوتن** Isaac Newton الفضل فى تمهيد الطريق لعلم الميكانيكا الكلاسكية عن طريق قوانين الحركة التى فسرت الكثير من الظواهر الطبيعية والفلكية، كما كان للعالم الألماني **يوهانز كيبلر** johannes Kepler و **جاليليو جاليلي الإيطالى** Galileo Galilei دور عظيم فى وضع قوانين تصف حركة الكواكب؛ حيث بينت قوانين كيبلر أن هناك قوة تجاذب بينها، وبينت أيضًا حركة الكواكب حول الشمس وفق المنظور الجديد الذي يعتمد على مركزية الشمس بشكل أصبحت فيه الحسابات تطابق الأرصاد الفلكية إلى درجة كبيرة، وقد ظلت هذه القوانين سائدة منذ القرن السابع عشر حتى ظهور النظرية النسبية التى صاغها **أينشاتين** Einstein خلال السنوات ١٩٠٥ - ١٩١٦ وميكانيكا الكم التى اشترك فى صياغتها **ماكس بلانك** Max plank و **هينزبرج** Heyznberg و **شرودنجر** Schrodinger و **ديراك** Dirac فى بداية القرن العشرين.

كما ابتكر **الدكتور أحمد زويل** Dr. Ahmed Zewail نظام تصوير سريعًا للغاية، يعمل باستخدام الليزر، له القدرة على رصد حركة الجزيئات عند نشوئها وعند التحام بعضها ببعض، وقد سجل **أحمد زويل** فى قائمة الشرف بالولايات المتحدة الأمريكية والتى تضم **إلبرت أينشتاين** و **ألكسندر جراهام بيل**.
ولمزيد من المعلومات ابحث فى الموسوعة الحرة (ويكبيديا) على الموقع: ***http: //ar.wikipedia.org***

وحدات القياس: *Measuring Units*

عندما يتقدم أحد الطلاب إلى الكليات العسكرية فإنه يقوم بإجراء بعض الفحوصات الطبية مثل قياس الطول، والوزن ، وضغط الدم، ومعدل ضربات القلب، ... فعملية القياس هى مقارنة مقدار بمقدار آخر من نفس النوع، وذلك لمعرفة عدد مرات احتواء المقدار الأول إلى المقدار الثانى، والنظام المستخدم فى معظم أنحاء العالم هو النظام الدولى للوحدات. International system of units (SI)

و يتضمن هذا النظام الدولى للوحدات (SI) سبع وحدات أساسية، وقد حُددت وحدات هذه الكميات الأساسية باستخدام القياس المباشر معتمدة على وحدات معيارية لكل من الطول والزمن والكتلة المحفوظة بدائرة الأوزان والمقاييس بفرنسا، أما الوحدات الأخرى فيمكن اشتقاقها من الوحدات الأساسية، وسنختص فى دراستنا بالكميات الآتية:

أولًا: الكميات الأساسية ووحدات قياسها فى نظام (SI) *Fundamental quantities*

الكمية الأساسية		الوحدة الأساسية		الرمز	
الطول	length	متر	meter	م	(m)
الكتلة	mass	كيلو جرام	kilogram	كجم	(kg)
الزمن	time	ثانية	second	ث	(s)

ومن مميزات استخدام وحدات النظام الدولي هو سهولة التحويل بين الوحدات

أضف إلى معلوماتك

١- الفيمتو ثانية *Femtosecond*

الفيمتو ثانية: هو جزء من مليون مليار جزء من الثانية، أي (عشرة مرفوعة للقوة (-١٥)) من الثانية والنسبة بين الثانية والفيمتو ثانية هي النسبة بين الثانية و٣٢ مليون سنة.

فى عام ١٩٩٠م تَمكَّن العالم المصرى أحمد زويل من تثبيت اختراعه المعروف بكيمياء الفيمتو، وذلك بعد جهد مضنٍ مع فريق بحثه القابع فى معهد كاليفورنيا للتقنية امتد منذ عام ١٩٧٩، و يتَلخَّص اختراعه فى اختراع وحدة زمنيةٍ تخطَّت حاجز الزمن العادي إلى وحدة زمن الفيمتو ثانية، وتوصَّل هذا العالم إلى اكتشافه العلمي باستخدام نبضات ليزر قصيرة المدى وشعاع جزيئي داخل أمبوب مفرغ، وكاميرا رقمية ذات مواصفات فريدة، وذلك لتصوير حركة الجزيئات منذ ولادتها وقبل التحاقها بباقي الجزيئات الأخرى، وأصبح بالإمكان التدخل السريع ومباغتة التفاعلات الكيميائية عند حدوثها باستخدام نبضات الليزر كتليسكوب للمشاهدة، ومتابعة عمليات الهدم والبناء فى الخلية، وقد جعل هذا العالم العربي العملاق الباب مفتوحًا لاستخدام هذا الاكتشاف العلمي فى مجال الطب، والفيزياء، وأبحاث الفضاء وغيرها الكثير، وسُجِّلت باسمه مدرسة علمية جديدة عُرِفَت باسم كيمياء الفيمتو.

٢ – مضاعفات الوحدات

الوحدة		الرمز	القياس
تيرا	tera	T	١٠^١٢
جيجا	giga	G	١٠^٩
ميجا	mega	M	١٠^٦
كيلو	kilo	K	١٠^٣

كسور الوحدات

الوحدة		الرمز	القياس
ديسي	deci	d	١٠^-١
سنتي	centi	c	١٠^-٢
مللي	milli	m	١٠^-٣
ميكرو	micro	u	١٠^-٦
نانو	nano	n	١٠^-٩
بيكو	pico	p	١٠^-١٢
فمتو	femto	f	١٠^-١٥

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

(١) ٢,٧٥ كم إلى م.

(٢) ٦٣٥ مم إلى ديسم.

(٣) ٧٥٠ كيلو هرتز إلى ميجا هرتز.

(٤) ١٩٧٠ جم إلى كجم.

على النحو التالي:

(١) ٢,٧٥ كم = ٢,٧٥ × ١٠٠٠ = ٢٧٥٠ م

(٢) ٦٣٥ مم = ٦٣٥ × $١٠^{-٢}$ = ٦,٣٥ ديسم

(٣) ٧٥٠ كيلو هرتز = ٧٥٠ × $١٠^{-٣}$ = ٠,٧٥ ميجا هرتز

(٤) ١٩٧٠ جم = ١٩٧٠ × $١٠^{-٣}$ = ١,٩٧ كيلو جرام.

تذكر أن

كم = ١٠٠٠م

م = ١٠ ديسم

ديسم = ١٠ سم

سم = ١٠ مم

ثانيًا: الكميات المشتقة *Derived quantities*

١ وحدة قياس السرعة

تعرف السرعة بأنها معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن.

وحدة قياس السرعة = وحدة قياس المسافة ÷ وحدة قياس الزمن

فإن السرعة تقاس بوحدة: متر / ثانية (م/ث).

٢ العجلة

تعرف العجلة بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن و يكون:

وحدة قياس العجلة : مترًا / ثانية مربعة (م/ث^٢).

هل تعلم

الثانية العيارية: هى الفترة الزمنية التى تستغرقها ذرة السيزيوم لتتذبذب بمقدار دورة كاملة.

لاحظ أن

وحدات قياس الكميات المتجهة (السرعة، العجلة، القوة) تعامل من حيث مقاديرها فقط بصرف النظر عن الاتجاه.

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

(١) ١ كم/س إلى م/ث.

(٢) ١ كم/س إلى سم / ث.

(٣) ١ كم /س /ث إلى م /ث^٢

(٤) كم /س/ث إلى سم/ث^٢

على النحو التالي:

(١) ١ كم/س = $\frac{١ \times ١٠٠٠ م}{٦٠ \times ٦٠ ث}$ = $\frac{٥}{١٨}$ م/ث

(٢) ١ كم/س = $\frac{١ \times ١٠٠٠ \times ١٠٠ سم}{٦٠ \times ٦٠ ث}$ = $\frac{٢٥٠}{٩}$ سم/ث

تذكر أن

اليوم الشمسى المتوسط = ٢٤ ساعة .

الساعة = ٦٠ دقيقة.

الدقيقة = ٦٠ ثانية.

③ كم/س/ث $=$ $\frac{١٠٠٠ م}{٦٠ \times ٦٠ ث \times ث}$ $=$ $\frac{٥}{١٨}$ م/ث٢

④ كم/س/ث $=$ $\frac{١٠٠٠ \times ١٠٠ سم}{٦٠ \times ٦٠ ث \times ث}$ $=$ $\frac{٢٥٠}{٩}$ سم/ث٢

تدريب

① حول كلًّا من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

أ ٧٢ كم/س إلى م/ث   ب ١٠٠٠سم/ث إلى كم /س   ج ٣٦ كم/س/ث إلى سم/ث٢

٣ القوة *Force*

تعرف القوة بأنها حاصل ضرب الكتلة (ك) فى عجلة الحركة (جـ)

فإذا رمزنا للقوة بالرمز (ق) فإن ق = ك × جـ

وحدات قياس مقدار القوة

الوحدات المطلقة: مثل الداين والنيوتن حيث ١ نيوتن = ١٠^{٥} داين ويعرف النيوتن والداين على النحو التالي:

النيوتن: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١متر/ث^{٢}

الداين: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ١ سم/ث^{٢}

الوحدات التثاقلية:

مثل: ثقل الجرام (ث جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث كجم) حيث ١ ث كجم = ١٠^{٣} ث.جم

ويعرف ثقل الكيلو جرام وثقل الجرام على النحو التالى:

ثقل الكيلو جرام: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ كيلو جرام أكسبتها عجلة مقدار ٩,٨ متر/ث^{٢}

ثقل الجرام: هو مقدار القوة التى إذا أثرت على كتلة تساوى ١ جرام أكسبتها عجلة مقدارها ٩٨٠ سم/ث^{٢}

وتربط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة: ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

> **أضف إلى معلوماتك**
> جميع الأجسام (بغض النظر عن كتلتها) تسقط على سطح الأرض بتسارع (عجلة) منتظم يقع بين ٩,٧٨، ٩,٨٢ م/ث^{٢} اعتمادًا على دائرة العرض ولكننا سنعتبرها ٩,٨ م/ث^{٢} لسهولة الاستخدام ما لم تُحدد قيم أخرى لها.

وعلى ذلك يمكن تحويل كلٍّ من الوحدات الآتية إلى الوحدات المناظرة لها:

① ٣,١٤ نيوتن إلى داين

② ٦,٧٥ × ١٠^{٧} داين إلى نيوتن

على النحو التالى:

(١) ٣,١٤ نيوتن = ٣,١٤ × ١٠^٥ = ٣١٤٠٠٠ داين

(٢) ٦,٧٥ × ١٠^٧ داين = ٦,٧٥ × ١٠^٧ ÷ ١٠^٥ = ٦٧٥ نيوتن

تدريب

(٢) حول كلًّا من الوحدات التالية إلى الوحدات المناظرة لها:

أ) $\frac{1}{7}$ ث جم إلى داين

ب) ٥,٣٦ × ١٢٥٠ داين إلى نيوتن

جـ) ٢,٥٠ نيوتن إلى داين

يمكن وضع الكميات المشتقة فى جدول على النحو التالي:

الكمية المشتقة	علاقتها بالكميات الأخرى	وحدة القياس
السرعة (ع)(V)	المسافة ÷ الزمن	م/ث m/s
العجلة (جـ)(a)	السرعة ÷ الزمن	م/ث^٢ m/s^2
القوة (ق)(F)	الكتلة × العجلة	نيوتن N

تحقق من فهمك

اخترالإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) تقاس الكتلة بوحدة:

أ الداين　ب النيوتن　ج الكيلو جرام　د ثقل الكيلو جرام

(٢) من الكميات الأساسية فى النظام الدولى:

أ الكتلة　ب السرعة　ج العجلة　د القوة

(٣) الملليمتر وحدة تعادل:

أ $١٠^{-٣}$ متر　ب $١٠^{-٣}$ متر مكعب　ج $١٠^{-٢}$ سنتيمتر　د $١٠^{-٤}$ ديسميتر

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٤) ماذا يطلق على القيم التالية:

أ $١٠^{-٢}$ متر　ب $١٠^{-٣}$ متر　ج ١٠٠٠ متر

(٥) حول كلًّا ممايأتى إلى متر:

أ ٦٣,٤ سنتيمتر　ب ٥١٢,٦ ملليمتر　ج ٠,٥٣٤ ديسيمتير

(٦) تفكير ناقد: احسب بوحدة الكيلوجرام كتلة الماء اللازمة لملء وعاء على شكل متوازى مستطيلات طوله ١,٦م وعرضه ٠,٦٥٠ م وارتفاعه ٣٦ سنتيمتر، علمًا بأن كثافة الماء تساوى ١جم/سم^{٣} مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح .

[إرشاد: الكتلة = الحجم × الكثافة]



مقدمة الوحدة

يختص علم الإستاتيكا بحل جميع المشاكل الهندسية المتعلقة بدراسة توازن الأجسام المادية، وعمليات تحليل وتحصيل القوى المؤثرة عليها، والتأثير المتبادل الناشئ عنها ، وتطبيقاته المختلفة فى بناء المنازل والمبانى والجسور وتصميم الآلات والمحركات. وقد كان لنيوتن أبحاث ومؤلفات فى هذا المجال منها كتاب المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية الذى يتكون من ثلاثة أجزاء، ويعتبر أساس علم الميكانيكا الكلاسيكى. ومن أقوال نيوتن المشهورة عن نفسه «لست أعلم كيف أبدو للعالم، ولكننى أبدو لنفسى، وكأننى صبى يلعب على شاطئ البحر، ألهو بين الحين والحين بالعثور على حصاة ملساء أو صدفة أجمل من العادة، بينما ينبسط محيط الحقيقة العظيم مغلق الأسرار أمامى».

مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يوجد محصلة قوتين مقدارًا واتجاهًا (القوتان تؤثران فى نفس النقطة).
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين فى اتجاهين معلومين.
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين متعامدتين.
- يوجد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
- يبحث اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.
- يميز بين السطوح الملساء والسطوح الخشنة .
- يتعرف مفهوم الاحتكاك وخواصه .
- يتعرف قوة الاحتكاك وقوة الاحتكاك النهائى .
- يحدد معامل الاحتكاك ، وزاوية الاحتكاك والعلاقة بينهما .
- يحدد شروط اتزان جسم على مستو أفقى خشن .
- يحدد شروط اتزان جسم على مستو مائل خشن .
- يستنتج العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى عند وضع جسم على مستوى مائل خشن بشرط أن يكون على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط .
- يحل تطبيقات حياتية على الاحتكاك .

المصطلحات الأساسية

استاتيكا	Statics
قوة	Force
جسم جاسئ	Rigid body
قوة التثاقل	Gravitation force
عجلة السقوط الحر	acceleration of gravity
نيوتن	Newton
داين	Dyne
ثقل كيلو جرام	Kilogram weight
ثقل جرام	Gram weight
خط عمل قوة	Line of action of the force
تحليل قوة	Resolving force
مركبة قوة	force Component
اتزان جسم	equilibrium of a body
قاعدة مثلث القوى	triangle of forces
قاعدة لامي	lami's rule
اتزان جسم جاسئ	Equilibrium of rigid body
مستوى أملس	smooth plane
مستوى مائل أملس	inclined smooth plane
مركز ثقل	centre of gravity
الاحتكاك	Friction
سطح أملس	Smooth Surface
سطح خشن	Rough Surface
رد الفعل العمودي	Normal Reaction
قوة الاحتكاك السكونى	Static Frictional force
قوة الاحتكاك الحركى	Kinetic Frictional force
قوة الاحتكاك السكونى النهائى	Limiting Static Friction
رد الفعل المحصل	Resultant Reaction
زاوية الاحتكاك	Angle of Friction
مستوى أفقى خشن	Horizontal rough plane
مستوى مائل خشن	Inclined rough plane

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب Graphical computer programs



دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): القوى.

الدرس (١ - ٢): تحليل قوة إلى مركبتين.

الدرس (١ - ٣): محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

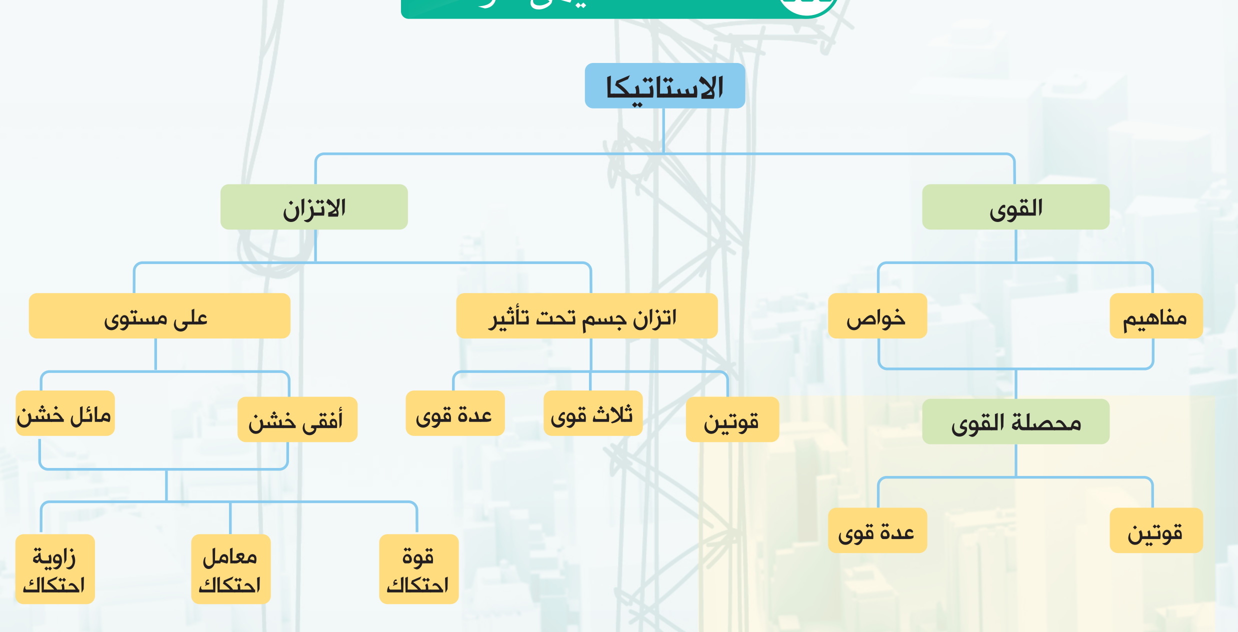
الدرس (١ - ٤): اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

الدرس (١ - ٥): اتزان جسم على مستوى أفقي خشن.

الدرس (١ - ٦): اتزان جسم على مستوى مائل خشن.



مخطط تنظيمى للوحدة





القــوى
Forces

سوف تتعلم
- بعض المفاهيم الأساسية فى الإستاتيكا.
- خواص القوة
- محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة.
- إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ
- قوة Force
- محصلة Resultant
- جسم جاسئ Rigid body
- قوة التثاقل Gravitation force
- عجلة السقوط الحر Acceleration of gravity
- نيوتن Newton
- داين Dyne
- ثقل كيلو جرام Kilogram weight
- ثقل جرام Gram weight

الأدوات والوسائل
- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs

تمهيد:
عَلمت أنَّ الإستاتيكا هى فرع الميكانيكا الذى يدرس **القوى وشروط اتزان الأجسام المادية التى تؤثِّر عليها القوى**، وستكون دراستنا فى هذه الوحدة على اتزان الأجسام الجاسئة [١] فقط.

ومن دراستك فى المتجهات علمت الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

تذكر أن

الكمية القياسية **Scalor** تتحدد تحديدًا تامًّا بقيمتها العددية مثل المسافة، الكتلة، الزمن، المساحة، الحجم...

الكمية المتجهة **Vector** وتتحدد باتجاهها بالإضافة إلى قيمتها العددية مثل القوة والإزاحة والسرعة، والوزن...إلخ.

القوة: *Force*
تتوقف حالة اتزان أو حركة الجسم على طبيعة التأثير الميكانيكى المتبادل بينه وبين الأجسام الأخرى، أى على حالات الضغط أو الشد أو التجاذب أو التنافر التى تحدث للجسم نتيجةً لهذا التأثير.

تعريف
➤ تعرف القوة بأنها تأثير أحد الاجسام على جسم آخر.

أضف إلى معلوماتك

تنقسم الأجسام الطبيعية إلى:
- أجسام جاسئة لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها.
- أجسام قابلة للتشكيل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل السوائل والغازات والمطاط والصلصال...إلخ

خواص القوة:
يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

أولاً: مقدار القوة.

يَتعين مقدار القوة بمقارنتها بوحدة القوى وقد سبق لك دراسة الوحدة الأساسية لقياس القوة فى الميكانيكا وهى **النيوتن (N)** أو ثقل الكيلوجرام **(kg.wt)** حيث:

➤ ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم ، ١ نيوتن = ١٠^٥ داين

➤ ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

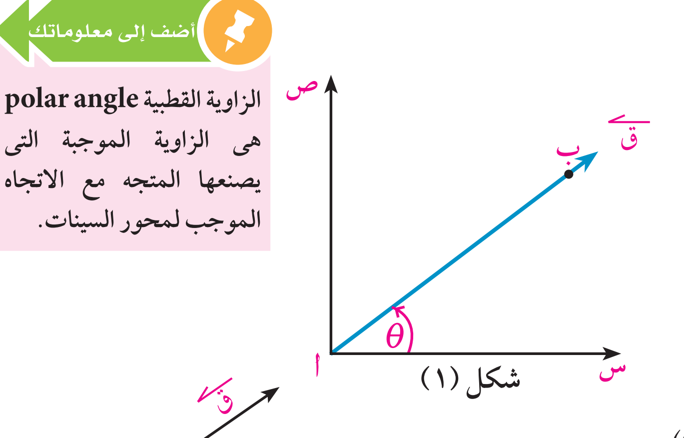
(مالم يذكر خلاف ذلك) [٢]

١- الجسم الجاسئ هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية.

٢- قوة التثاقل (أو الوزن) هى مقدار جذب الأرض للجسم، حيث إن الأرض تجذب الأجسام الساقطة نحوها، وتختلف قيمة عجلة السقوط الحر للأجسام من مكان لآخر على سطح الأرض والقيمة التقريبية لها تساوى ٩,٨ م/ ث^٢ ما لم يذكر خلاف ذلك، وسيعرض هذا الموضوع بالتفصيل فى مواضع أخرى فى الميكانيكا.

ثانيا: اتجاه القوة

يُمثل شكل (١) المجاور متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ويُمكِن تَمثيله بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ حيث أ نقطة البداية، ب نقطة النهاية للقطعة المستقيمة الموجهة، ويُعبر عن مقدار القوة بمعيار المتجه $||\overrightarrow{أب}||$ (طوله) (بمقياس رسم مناسب) ويناظر اتجاه السهم اتجاه القوة $\overrightarrow{ق}$، وتسمى زاوية θ بالزاوية القطبية للمتجه فى مستوى القوة $||\overrightarrow{ق}||$ وتُكتب على الصورة القطبية كالآتى ($||\overrightarrow{ق}||$، θ).

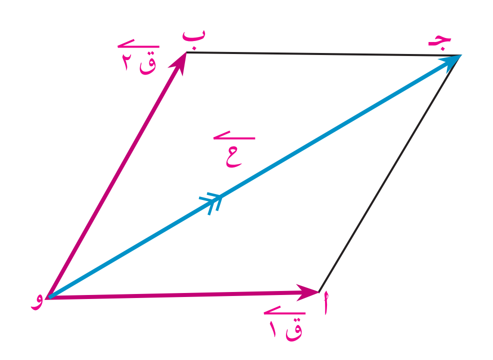


شكل (١)

أضف إلى معلوماتك

الزاوية القطبية polar angle هى الزاوية الموجهة التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ثالثًا: نقطة تأثير القوة وخط عملها



شكل (٢)

فى شكل (١): تَنطبق نقطة أ عادة على نقطة تاثير القوة $\overrightarrow{ق}$، ويُمكِنُ نَقْل نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى أى نقطة أخرى، بحيث تقع على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم كما فى **شكل (٢)** خط عمل القوة يسمى $\overleftrightarrow{أب}$ فى **شكل (١)** بخط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$

أىْ أنَّ خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة:

لكل قوتين مؤثرتين على جسم فى نقطة واحدة، قوة محصلة تؤثر فى نفس النقطة، تقوم بنفس التأثير الذي تقوم به القوتان وتمثل هندسيًا بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

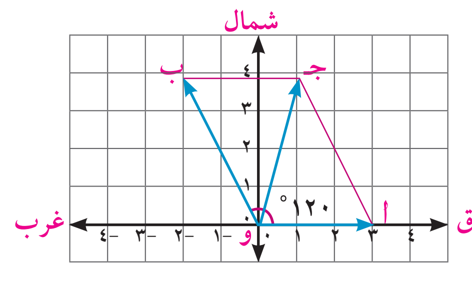
ففى الشكل المقابل نجد أنَّ: $\overrightarrow{ع}$ الممثل لقطر متوازى الأضلاع و جـ يُمثل محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$، $\overrightarrow{ق_2}$ **أىْ أنَّ**: $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$



نشاط

استخدام برنامج (GeoGebra)

$\overrightarrow{ق_1}$، $\overrightarrow{ق_2}$ قوتان تُؤثِّران فى نقطة من جسم جاسئ، حيث $ق_1$ = ٣٠٠ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق، $ق_2$= ٤٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلة القوتين.



- اختر مقياس رسم مناسبًا (ليكن ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن).
- ارسم $\overrightarrow{وأ}$ تمثل القوة $\overrightarrow{ق_1}$ حيث $||\overrightarrow{وأ}||$ = ٣ سم فى الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- ارسم ∠ أ و ب القطبية حيث ق (∠ أ و ب) = ١٢٠°
- ثم ارسم $\overrightarrow{وب}$ تمثل القوة $\overrightarrow{ق_2}$ حيث $||\overrightarrow{وب}||$ = ٤ سم.
- أكمل رسم متوازى الأضلاع و أ جـ ب.

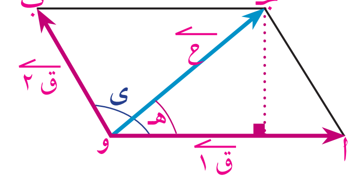
- لاحظ أن محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{و جـ}$.
- حدد باستخدام البرنامج $\|\overrightarrow{و جـ}\| \simeq ٣,٦$ سم. **أيْ أنَّ** ح $\simeq ٣,٦ \times ١٠٠ = ٣٦٠$ نيوتن.
- لاحظ أن $\overrightarrow{و جـ}$ يصنع مع $\overrightarrow{و أ}$ زاوية قياسها ٥٣″ ٥٣′ ٧٣°

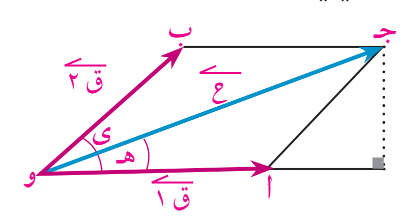
أيْ أنَّ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ مقدارها ٣٦٠ نيوتن تقريبًا وتصنع مع $\overrightarrow{ق_١}$ زاوية قياسها ٥٣″ ٥٣′ ٧٣°.

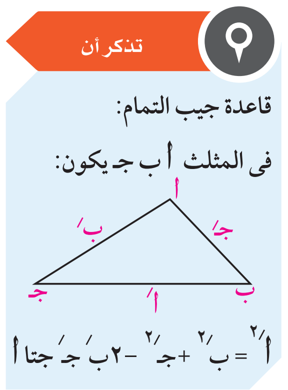
تطبيق على النشاط

(١) استخدم برنامج (*GeoGebra*) فى إيجاد محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ اللتين تؤثران فى نقطة مادية حيث $ق_١ = ٤٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، $ق_٢ = ٥٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٨٠° شمال الشرق.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًا: *The resultant of two force meeting at apoint analytically*







نفرض أنَّ $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و) وأن قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين (ى) فإذا كان $\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ تمثلان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فإن $\overrightarrow{و جـ}$ تمثل المحصلة $\overrightarrow{ع}$ وبفرض أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها $\overrightarrow{ع}$ مع $\overrightarrow{ق_١}$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام يمكن إيجاد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ من العلاقات:

$$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢\, ق_١ ق_٢ \text{جتا ى}} \quad , \quad \text{ظاهـ} = \frac{ق_٢ \text{جا ى}}{ق_١ + ق_٢ \text{جتا ى}}$$

حيث: ق١ ، ق٢ ، ع مقادير القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ع}$ على الترتيب

فكر: كيف يمكن الاستدلال على صحة العلاقات السابقة .

مثال

(٧) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما ٤٥°. أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها مع القوة الأولى.

ق١ = ٣ نيوتن
٤٥°
ق٢ = $٣\sqrt{٢}$ نيوتن

الحل

بوضع: $ق_١ = ٣$ ، $ق_٢ = ٣\sqrt{٢}$ ، $ى = ٤٥°$

$\because ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢\, ق_١ ق_٢ \text{جتا ى}}$

$\therefore ع = \sqrt{(٣)^٢ + (٣\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times ٣ \times ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°}$

$= \sqrt{٩ + ١٨ + ١٨\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ نيوتن

$\because \text{ظاهـ} = \frac{ق_٢ \text{جا ى}}{ق_١ + ق_٢ \text{جتا ى}}$ $\quad \therefore \text{ظاهـ} = \frac{٣\sqrt{٢} \times \text{جا } ٤٥°}{٣ + ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٢}$

وباستخدام الآلة الحاسبة فإن: ق(∠هـ) = ٥٤″ ٣٣′ ٢٦°

حل آخر للجزء الثانى من المثال :

لاحظ أن: فى الشكل المقابل المثلث و أ ب يمثل القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ حيث ∠هـ١ هى زاوية ميل خط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ مع المحصلة $\overleftarrow{ع}$ ، ∠هـ٢ هى زاوية ميل خط عمل $\overleftarrow{ق_١}$ مع المحصلة $\overleftarrow{ع}$ باستخدام قاعدة جيب الزاوية.

لاحظ أن: جا (١٨٠° − ى) = جاى

فإن: $\frac{ق_١}{جا هـ_١} = \frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$ حيث ى = هـ١ + هـ٢

وتستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة على أى من $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

ففى المثال السابق: **لإيجاد قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ نستخدم العلاقة:** $\frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$

∴ $\frac{٣\sqrt{٢}}{جا هـ_٢} = \frac{٣\sqrt{٥}}{جا ٤٥}$

أىْ أنَّ **جا هـ٢** = $\frac{٣\sqrt{٢} \times جا ٤٥°}{٣\sqrt{٥}}$

ومنها فإن قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ تساوى ٥٤″ ٣٣′ ٢٦° وهو نفس الجواب السابق.

ملاحظة : **يمكن استخدام هذه الطريقة فى حل التمارين.**

حاول أنْ تحل

(٢) قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوي ٦٠°. أوجد مقدار محصلتهما، وزاوية ميلها على القوة الأولى.

تفكير ناقد: أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى الحالات الآتية:

١- إذا كانت القوتان متعامدتين.

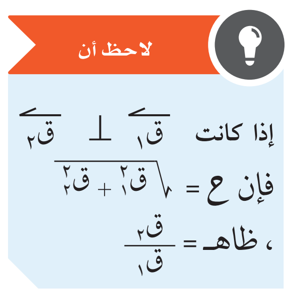
٢- إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار .

مثال

(٨) أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

(أ) ق١ = ٥ نيوتن ، ق٢ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

(ب) ق١ = ق٢ = ١٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°



إذا كانت $\overleftarrow{ق_١} \perp \overleftarrow{ق_٢}$

فإن ع = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

، ظاهـ = $\frac{ق_٢}{ق_١}$

الحل

أ ∵ $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متعامدتان أى ق(∠ى) = ٩٠° **فتكون جا ى** = ١ ، جتاى = ٠

∴ ع = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$ ، **لذلك فإن:** ع = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ نيوتن

ويكون اتجاه المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ هو: ظاهـ = $\frac{ق_٢}{ق_١}$ **أىْ أنَّ:** ظاهـ = $\frac{١٢}{٥}$

∴ قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١}$ هى ٤٩″ ٢٢′ ٦٧°

ب ∵ ع = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ **وبالتعويض عن** ق$_١$ = ق$_٢$ = ١٦

∴ ع = $\sqrt{(١٦)^٢ + (١٦)^٢ + ٢ × ١٦ × ١٦ جتا ١٢٠°}$ = ١٦ نيوتن

ونلاحظ من الشكل المرسوم أن: ق$_١$ = ق$_٢$ = ع = ١٦ نيوتن، وأن المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين المتساويتين، أىْ أنَّ قياس زاوية ميل المحصلة على أىٍّ من القوتين = ٦٠°



لاحظ أن : من هندسة الشكل:

∵ جتا $\frac{ى}{٢}$ = $\frac{\frac{١}{٢}ع}{ق}$ ∴ ع = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$

حاول أنْ تحل

٣ أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

أ ق$_١$ = ٤,٥ نيوتن ، ق$_٢$ = ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

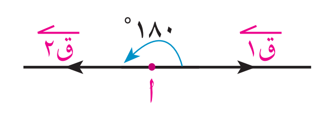
ب ق$_١$ = ق$_٢$ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

حالات خاصة:

١- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه:

➤ فى هذه الحالة فإن ق(∠ى) = صفر° و يكون جتاى = ١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة **نجد أنَّ:** ع = ق$_١$ + ق$_٢$ ويكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة **العظمى للمحصلة**.

٢- إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل، وفى اتجاهين متضادين:



➤ فى هذه الحالةفإن ق(∠ى) = ١٨٠° ويكون جتاى = - ١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة نجد أنَّ: ع = |ق$_١$ - ق$_٢$| ويكون اتجاه المحصلة يَعمل فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة **الصغرى للمحصلة**.

مثال: أوجد القيمتين العظمى والصغرى لمحصلة القوتين ٤ ، ٧ نيوتن.

➤ القيمة العظمى = ٤ + ٧ = ١١ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوتين.

➤ القيمة الصغرى = |٤ − ٧| = ٣ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوة ٧ نيوتن.

مثال

⑨ قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد: مقدار $\overleftarrow{ق}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق}$.

الحل

بالتعويض عن: $ق_١ = ق$ ، $ق_٢ = ٤$ ، $ع = ٤\sqrt{٣}$ ، $ى = ١٢٠°$

فى القانون : $ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى$

∴ $(٤\sqrt{٣})^٢ = ق^٢ + (٤)^٢ + ٢ × ق × ٤ جتا ١٢٠°$ أى أن : $٤٨ = ق^٢ + ١٦ - ٤ ق$

∴ $ق^٢ - ٤ق - ٣٢ = ٠$ **أىْ أنَّ:** $(ق + ٤)(ق - ٨) = ٠$ **ومنها** ق = ٨ نيوتن، ق = -٤ مرفوض

لإيجاد قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم القانون: $ظاهـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$

∴ $ظاهـ = \frac{٤ × جا ١٢٠°}{٨ + ٤ × جتا ١٢٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق_١} = ٣٠°$

حل آخر للجزء الثاني:

لإيجاد قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم قانون الجيب: $\frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$

∴ $\frac{٤}{جا هـ_٢} = \frac{٤\sqrt{٣}}{جا ١٢٠°}$

$جا هـ_٢ = \frac{١}{٢}$ بالاختصار والتبسيط

أىْ أنَّ قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق}$ تساوى ٣٠°

حاول أنْ تحل

④ قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°. أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التى مقدارها ق.

تعبير شفهى: أوجد محصلة قوتين متساويتين فى المقدار، ولهما نفس خط العمل ويعملان فى اتجاهين متضادين.

تمارين (١ - ١)

أكمل ما يأتى:

(١) يتحدد تأثير قوة على جسم بالآتى ....

(٢) متجه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ...

(٣) القيمة العظمى لمحصلة قوتين مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى .... نيوتن.

(٤) القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن متلاقيتين فى نقطة يساوى .... نيوتن.

(٥) ٢ ، ٣ نيوتن مقداري قوتان فإذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) مقدار محصلة القوتين ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° تساوى.

أ ٢ نيوتن　　ب ٦ نيوتن　　ج ٧ نيوتن　　د ٨ نيوتن

(٧) قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

أ ٣٠°　　ب ٤٥°　　ج ٦٠°　　د ٩٠°

(٨) قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة، مقدار كلٍّ منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى:

أ ٣٠°　　ب ٦٠°　　ج ١٢٠°　　د ١٥٠°

(٩) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى:

أ ١,٥　　ب ٣　　ج $٣\sqrt{٣}$　　د ٦

(١٠) إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى تساوى:

أ $\frac{٣}{٥}$　　ب $\frac{٤}{٥}$　　ج $\frac{٣}{٤}$　　د $\frac{٤}{٣}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°. أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى.

(١٢) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ ث.كجم تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

(١٣) قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث. كجم تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث. كجم. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

⑭ قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما ق$\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق.

⑮ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على ق. أوجد مقدار ق.

⑯ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد مقدار ق.

⑰ قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٢ق نيوتن. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

⑱ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما يساوى $\frac{-٤}{٥}$ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

⑲ قوتان متساويتان مقدار كلٍّ منهما ق ث.كجم تَحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث.كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق.

⑳ قوتان مقدارهما ١٢ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق، وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا عُلِمَ أنَّ خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

㉑ ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ قوتان تؤثران فى نقطة مادية، وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ومقدار محصلتهما $\sqrt{١٩}$ نيوتن. وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى ٧ نيوتن. أوجد قيمة كل من ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$.

㉒ قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث.كجم تؤثران فى نقطة ما ، إذا ضُوعِفَ مقدار الثانية وزيد مقدار الأولى ١٥ ث.كجم لا يتغير اتجاه محصلتها. أوجد مقدار ق.



تحليل القوى

Forces resolution

سوف تتعلم

- تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.
- تحليل قوة فى اتجاهين متعامدين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مركبة قوة force Component
- مثلث قوى triangle of forces
- مركز ثقل centre of gravity

الأدوات والوسائل

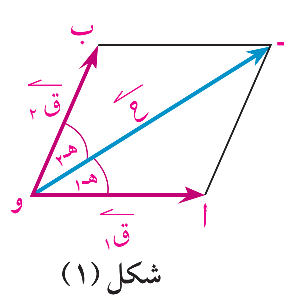
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تمهيد:

إنَّ تحليل قوة معلومة إلى عِدَّة مركبات بوجه عام يعنى إيجاد مجموعة مؤلَّفة من عِدَّة قوى ، تكون القوة المعلومة هى مُحصلتها، وسنقتصر على دراسة **تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.**

تحليل قوة فى اتجاهين معلومين

Resolution of a force into two components



شكل (١)

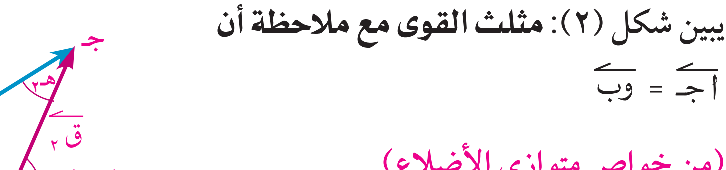
يبين شكل (١): متجه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ المراد تحليلها إلى مركبتين فى الاتجاهين $\overleftrightarrow{و أ}$ ، $\overleftrightarrow{و ب}$ واللتين تصنعان زاويتين قياسيهما هـ١ ، هـ٢ على الترتيب مع $\overrightarrow{ح}$ ولتكن المركبتان هما: $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$

يبين شكل (٢): مثلث القوى مع ملاحظة أن

$\overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{و ب}$

(من خواص متوازى الأضلاع)

وبتطبيق قاعدة الجيب نجد أن:



شكل (٢)

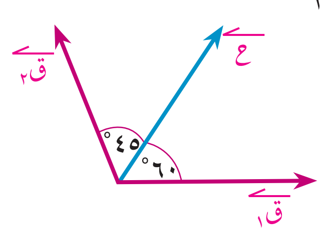
$$\frac{ق_1}{جا\, هـ_2} = \frac{ق_2}{جا\, هـ_1} = \frac{ح}{جا\,(هـ_1 + هـ_2)}$$

(لاحظ أن : جا [١٨٠° - (هـ١ + هـ٢)] = جا (هـ١ + هـ٢)

مثال

① حلِّل قوة مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين ٦٠° ، ٤٥° فى اتجاهين مختلفين منها مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية.

الحل



بتطبيق قاعدة الجيب:

$$\frac{ق_1}{جا\, ٤٥°} = \frac{ق_2}{جا\, ٦٠°} = \frac{١٢}{جا\, ١٠٥°}$$

$$\therefore ق_1 = جا\, ٤٥° \times \frac{١٢}{جا\, ١٠٥°} \simeq ٨{,}٧٨٤٦ \text{ نيوتن}$$

$$ق_2 = جا\, ٦٠° \times \frac{١٢}{جا\, ١٠٥°} \simeq ١٠{,}٧٥٨٩ \text{ نيوتن}$$

حاول أنْ تحل

١) حلل قوة مقدارها ٣٦ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥°فى اتجاهين مختلفين منها.

مثال — **تطبيقات حياتية**

٢) مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يميلان على الأفقى بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°.

➤ حلل وزن المصباح فى الاتجاهين $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ،$\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ مقربًا الناتج لأقرب نيوتن.



الحل

نُمثِّل قوة الوزن (**٢٠ نيوتن**) بمتجه يعمل رأسيًّا لأسفل نقطة بدايته هى النقطة **جـ**.

نُحلِّل متجه الوزن فى اتجاهى الحبلين المعدنيين كما يلى:

$$\frac{و_١}{\text{جا } ٨٥°} = \frac{و_٢}{\text{جا } ٨٥°} = \frac{٢٠}{\text{جا } ١٧٠°}$$ **أىْ أن:**

ومن ذلك تكون: $و_١ = و_٢ = ٢٠ \times \frac{\text{جا } ٨٥°}{\text{جا } ١٧٠°}$

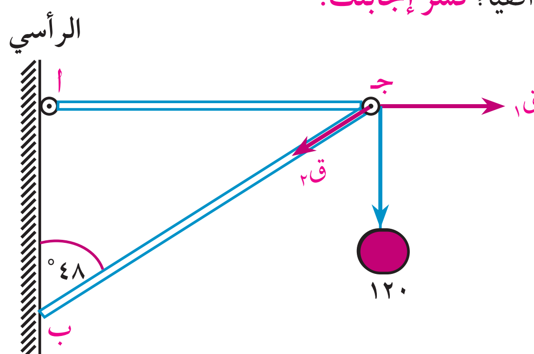
$و_١ = و_٢ = ١١٤,٧٣٧١٣ \simeq ١١٥$ نيوتن.

تفكير ناقد: ماذا يَحدث لمقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقى عن ٥°؟ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدنى أفقيًّا؟ **فسِّر إجابتك.**

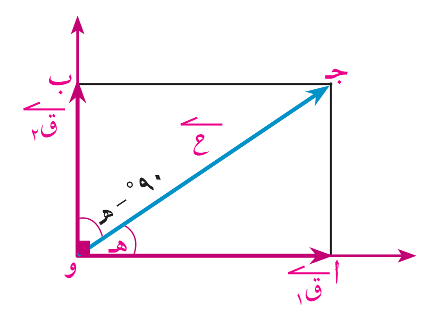
حاول أنْ تحل

٢) **الشكل المقابل:**

حلِّل القوة الرأسية ١٢٠ث.جم إلى مركبتين إحداهما فى الاتجاه الأفقي، والأخرى فى اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°.



تحليل قوة فى اتجاهين متعامدين *Resolution of a force into two perpendicular components*



إذا أثرت القوة $\overleftarrow{ع}$ فى نقطة مادية (و) كما فى الشكل المجاور، وكانت مركبتيهما المتعامدتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حيث اتجاه $\overleftarrow{ق_1}$ يميل على اتجاه $\overleftarrow{ع}$ بزاوية قياسها هـ ، فإن متوازى الأضلاع يؤول فى هذه الحالة إلى المستطيل أجـ ب و ، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث و أ جـ فإن:

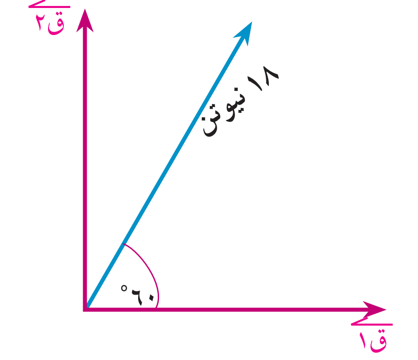
$$\frac{ق_1}{جا(٩٠° - هـ)} = \frac{ق_2}{جا هـ} = \frac{ح}{جا ٩٠°}$$

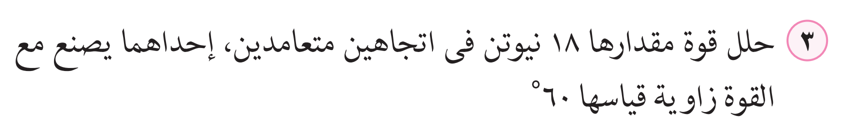
أىْ أنَّ: $\frac{ق_1}{جتا هـ} = \frac{ق_2}{جا هـ} = ح$

ومن ذلك نستنتج أنَّ:

- $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه معلوم) = ع جتا هـ
- $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ع جا هـ

مثال





٣ حل قوة مقدارها ١٨ نيوتن فى اتجاهين متعامدين، إحداهما يصنع مع القوة زاوية قياسها ٦٠°

الحل

$ق_1$ = ١٨ جتا ٦٠° = ١٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٩ نيوتن

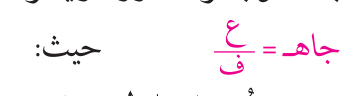
$ق_2$ = ١٨ جا ٦٠° = ١٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

حاول أنْ تحل

٣ حَلِّل قوة مقدارها ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن والتى تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

المستوى المائل *Inclined Plane*

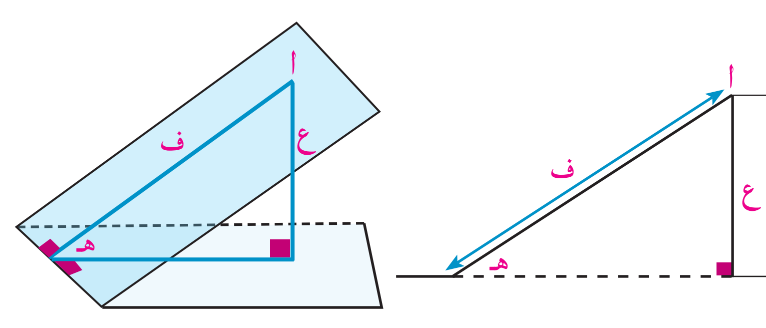
هو سطح يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$ ، وخط أكبر ميل للمستوى هو الخط فى المستوى المائل العمودى على خط تقاطع هذا المستوى مع المستوى الأفقى والموضح بالشكل باللون الأزرق ويكون



جاهـ = $\frac{ع}{ف}$ حيث:

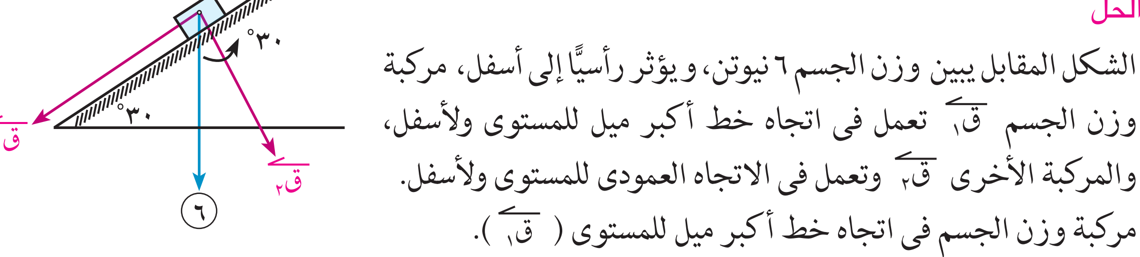
ع تمثل بُعد النقطة أ عن المستوى الأفقى،

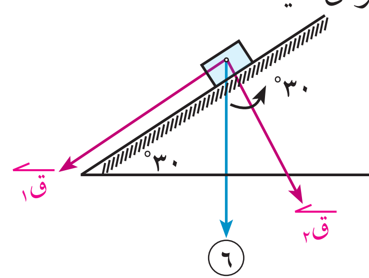
ف تمثل بُعد النقطة أ عن خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى.



مثال

④ وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°.
أوجد مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.





الحل

الشكل المقابل يبين وزن الجسم ٦ نيوتن، ويؤثر رأسيًا إلى أسفل، مركبة وزن الجسم $\overleftarrow{ق_١}$ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأسفل، والمركبة الأخرى $\overleftarrow{ق_٢}$ وتعمل فى الاتجاه العمودى للمستوى ولأسفل.

مركبة وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ($\overleftarrow{ق_١}$).

حيث $ق_١$ = ٦ جا هـ

= ٦ جا ٣٠° = ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٣ نيوتن

مركبة وزن الجسم فى الاتجاه العمودى على المستوى ($\overleftarrow{ق_٢}$)

حيث $ق_٢$ = ٦ جتا هـ

= ٦ جتا٣٠° = ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣$\sqrt{٣}$ نيوتن

أضف إلى معلوماتك

مركز ثقل الجسم الجاسئ
هى النقطة التى يمر بها دائمًا الخط الرأسى المار بنقطة التعليق عندما يعلق الجسم من أى نقطة عليه فعلى سبيل المثال.
(١) مركز ثقل جسم كروى منتظم ومتجانس هى النقطة التى يقع فيها المركز الهندسى لهذا الجسم.
(٢) مركز ثقل قضيب منتظم السمك والكثافة هو منتصف هذا القضيب.

تعبير شفهى: هل مقدار كل من مركبتى القوة $\overleftarrow{ق}$ أقل من مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ نفسها؟ فسر إجابتك.

حاول أنْ تحل

④ جسم جاسئ مقدار وزنه ٣٦ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل والاتجاه العمودى عليه.

تمـــارين (١ - ٢)

أكمل مايأتى:

١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تُساوى .... نيوتن.

٢) قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

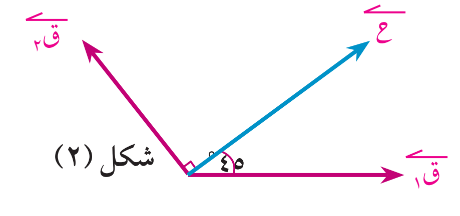


٣) فى شكل (١):

أ) إذا حلَّلت القوة $\overleftarrow{\text{ح}}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان $||\overleftarrow{\text{ح}}||$ = ١٢ نيوتن ، فإن: $\text{ق}_{١}$ = ... نيوتن ، $\text{ق}_{٢}$ = ... نيوتن.

شكل (١)

٤) فى شكل (٢):



شكل (٢)

أ) إذا حللت القوة $\overleftarrow{\text{ح}}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان $||\overleftarrow{\text{ح}}||$ = ١٨ نيوتن ، فإن: $\text{ق}_{١}$ = ... نيوتن ، $\text{ق}_{٢}$ = ... نيوتن

٥) فى شكل (٣):

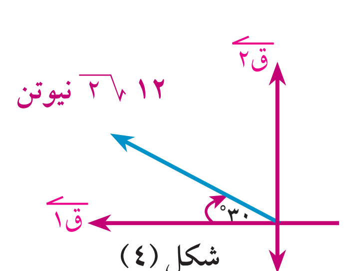
أ) إذا حلَّلت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ إلى مركبتين متعامدتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ وكان متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ وكان $||\overleftarrow{\text{ق}}||$ = $٦\sqrt{٢}$ ث كجم فإن:

$||\overleftarrow{\text{ق}}_{١}||$ = ... ث كجم ،


$||\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}||$ = ... ث كجم.

شكل (٣)

٦) فى شكل (٤):



شكل (٤)

أ) قوة مقدارها $١٢\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الغرب = ... نيوتن.
- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الشمال = ... نيوتن.

⑦ قوة مقدارها ٦٠٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية. أوجد مركبتيها فى اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠°، ٤٥°.

⑧ قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الشمال الشرقى. أوجد مركبتيها فى اتجاه الشرق واتجاه الشمال.

⑨ حلِّل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث جم فى اتجاهين متعامدين، أحدهما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

⑩ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الجنوب. أوجد مركبتيها فى اتجاهى ٦٠° شرق الجنوب، والأخرى فى اتجاه ٣٠° غرب الجنوب.

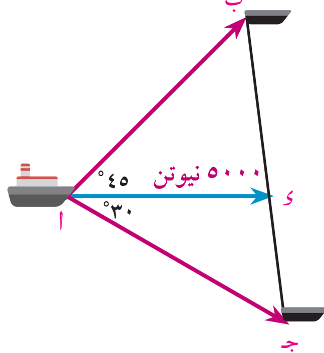
⑪ جسم جاسئ وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستو يَميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى وزن هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

تفكير إبداعى:

⑫ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث جم. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الربط بالملاحة البحرية:

⑬ يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، جـ تتصلان بحبلين مثبتين فى خُطاف فى نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥°، فإذا كان زاوية ميل أحد الحبلين على $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ يساوى ٤٥° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوى ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ء}}$. أوجد الشد فى كل من الحبلين .





محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

Resultant of coplanar forces meeting at a point

سوف تتعلم

- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسية.
- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محصلة. Resultant
- مركبة جبرية. Algebraic component
- متجه وحدة. Unit vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية. Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

سبق أن درست إيجاد محصلة قوتين مؤثِّرتين على جسم جاسئ متلاقيتان فى نقطة واحدة، حيث مُثلت هندسيًّا بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

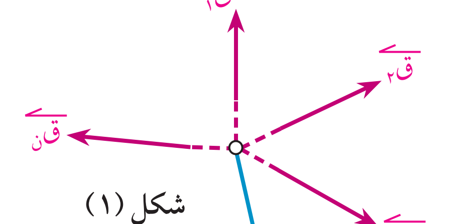
فهل يمكنك إيجاد محصلة عِدَّة قوى مستوية متلاقية فى نقطة واحدة هندسيًّا؟

تعلم



محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسيًّا:

إذا أثرت مجموعة القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، .... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ فى نقطة مادية كما فى شكل (١)



شكل (١)

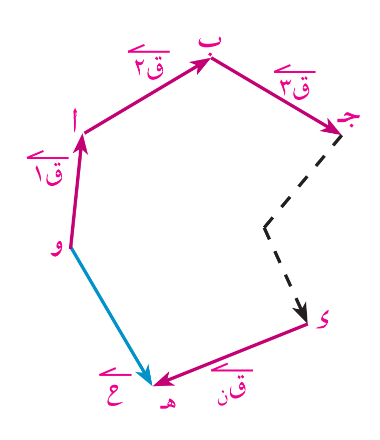
فباستخدام مقياس رسم مناسب

نرسم المتجه $\overleftarrow{و أ}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق_1}$

ثم نرسم $\overleftarrow{أ ب}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق_2}$

ثم نرسم $\overleftarrow{ب جـ}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ق_3}$ وهكذا.....

حتى نصل إلى نهاية المتجه $\overleftarrow{ق_ن}$ وذلك برسم $\overleftarrow{ء هـ}$.



شكل (٢)

المتجه $\overleftarrow{و هـ}$ الذى يعمل فى الاتجاه الدورى المضاد يُمثِّل محصلة القوى المعطاة، حيث:

$$\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} + ... + \overleftarrow{ق_ن}$$

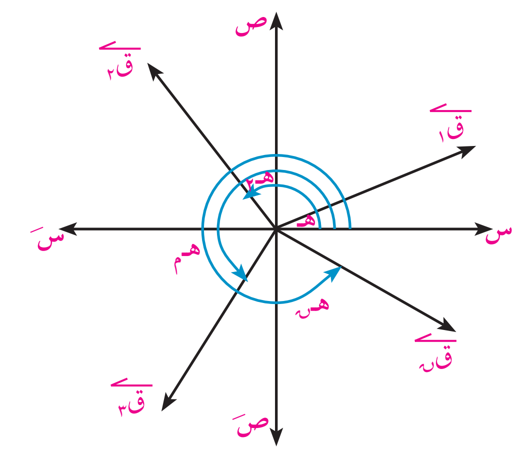
ويسمى هذا المضلع بمضلع القوى ومن السهل ملاحظة أن تكوين مضلَّع قوى ما هو إلا تطبيق لقاعدة مثلث قوى عدة مرات متتالية.

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليًّا

Resultant of coplanar forces meeting at a point analytically

إذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ،..... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ المستوية والمتلاقية فى نقطة وفى نظام إحداثى متعامد، وكانت تصنع الزوايا القطبية التى قياساتها هـ١ ، هـ٢ ، هـ٣ ، .... ، هـن وكانت $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ هما متجها الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ فإن: $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} + ... + \overleftarrow{ق_ن}$


وبتحليل كل قوة فى اتجاهى $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ المتعامدين فإن:



$\overleftarrow{ع}$ = (ق١ جتا هـ١ ، ق١ جا هـ١)

+ (ق٢ جتا هـ٢ ، ق٢ جا هـ٢)

+ .... + (قن جتا هـن ، قن جا هـن)

$\overleftarrow{ع}$ = (ق١ جتا هـ١ + ق٢ جتا هـ٢ + ... + قن جتا هـن) $\overleftarrow{س}$

+ (ق١ جا هـ١ + ق٢ جا هـ٢ + ... + قن جا هـن) $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ع} = (\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر جتا هـ_ر)\,\overleftarrow{س} + (\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر جا هـ_ر)\,\overleftarrow{ص}$

➢ **يسمى المقدار:** $\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر جتا هـ_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ويرمز له بالرمز س.

➢ **يسمى المقدار:** $\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر جا هـ_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ويرمز له بالرمز ص.

أضف إلى معلوماتك

يسمى الرمز $\sum$ (سيجما) برمز التجميع والعبارة $\sum_{ر=١}^{ن}$ مجموع ن عنصرًا بدأ من العنصر الأول.

ومن ذلك نكتب $\overleftarrow{ع}$ = س $\overleftarrow{س}$ + ص $\overleftarrow{ص}$

وتكون ح معيار المحصلة ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

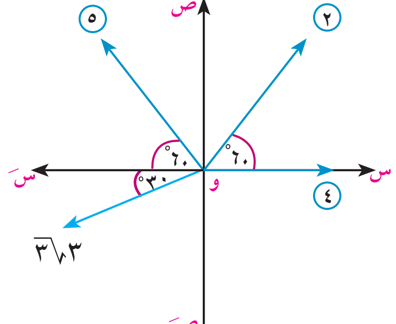
أىْ أنَّ: ع = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

مثال

١ أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق، والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة مقدارها ٥ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة $٣\sqrt{٣}$ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

القوى ٤ ، ٢ ، ٥ ، $٣\sqrt{٣}$ نيوتن قياس زواياها القطبية هى ٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ٢١٠° على الترتيب نوجد المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$



س = ٤ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٥ جتا ١٢٠° + $٣\sqrt{٣}$ جتا ٢١٠°

$= ٤ + ٢ \times \frac{١}{٢} - ٥ \times \frac{١}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤ + ١ - \frac{٥}{٢} - \frac{٩}{٢} = -٢$

ص = ٤ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٥ جا ١٢٠° + $٣\sqrt{٣}$ جا ٢١٠°

$= ٠ + ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}$

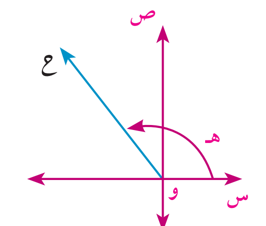
$= \sqrt{٣} + \frac{٥}{٢}\sqrt{٣} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ع} = -٢ \overleftarrow{س} + ٢\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$ ويكون $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٣}}{-٢} = -\sqrt{٣}$

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ هـ = ١٢٠°



أىْ أنَّ مقدار محصلة القوى يُساوى ٤ نيوتن، وتصنع زاوية قطبية قياسها ١٢٠°

حاول أنْ تحل

(١) تؤثِّر القوى المستوية التى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٣}$ ، ٤٠ نيوتن فى نقطة، بحيث كانت الزاوية بين اتجاهى القوتين الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى القوتين الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى القوتين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

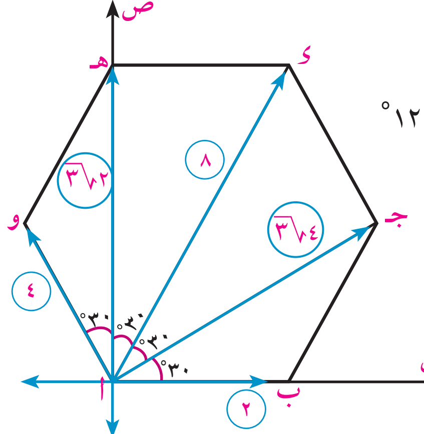
مثال

(٢) أ ب جـ ى هـ و شكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٨ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ ث كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ ى}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

باعتبار $\overleftarrow{أ ب}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون الزوايا القطبية للقوى هى:

٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° على الترتيب.



∴ س = ٢ جتا ٠° + $٤\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠° + $٢\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

$= ٢ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ \times \frac{١}{٢} + ٢\sqrt{٣} \times ٠ - ٤ \times \frac{١}{٢}$

$= ٢ + ٦ + ٤ - ٢ = ١٠$ نيوتن

ص = ٢ جا ٠° + $٤\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ $٢\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

$= ٠ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٢\sqrt{٣} + ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٢\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن

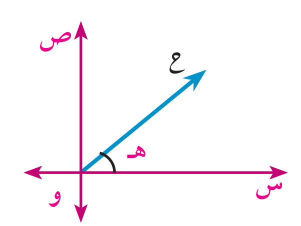
∴ $\overleftarrow{ع} = ١٠ \overleftarrow{س} + ١٠\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$

∴ $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢} = ٢٠$ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠} = \sqrt{٣}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ و(∠هـ) = ٦٠°

أيْ أنَّ المحصلة تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أى}$



تمـــارين (١ - ٣)

أكمل ما يأتى:

① إذا كانت القوى $\overleftarrow{ق_١} = ٢ \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٦ \overleftarrow{ص}$ فإن:

مقدار محصلة القوى = ... واتجاهها = ...

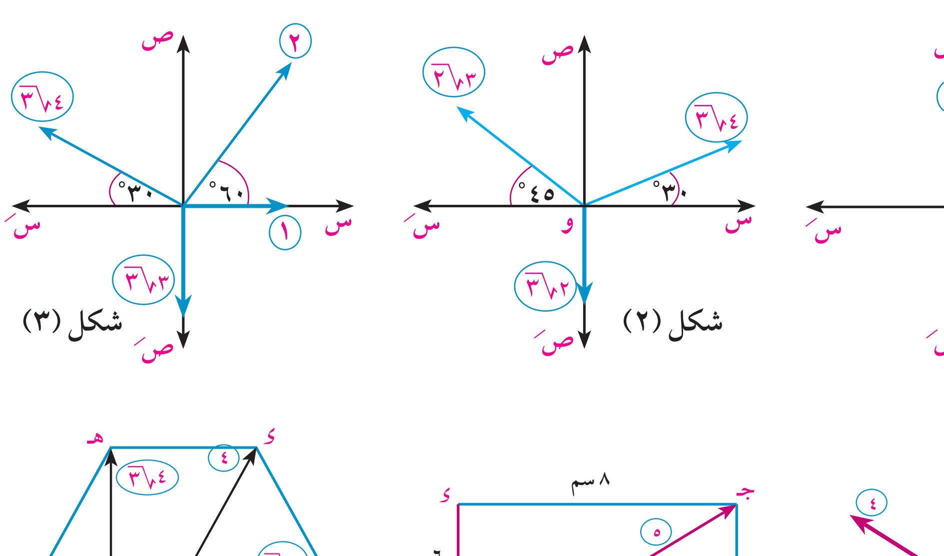
② إذا كانت القوى $\overleftarrow{ق_١} = ٢ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤ \overleftarrow{س} - ٨ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع} = ٢أ \overleftarrow{س} - ٣ب \overleftarrow{ص}$

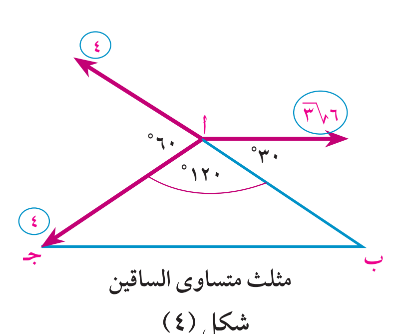
فإن: أ = ... ، ب = ...

③ إذا كان $\overleftarrow{ق_١} = ٣ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = أ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٤ \overleftarrow{س} - ب \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع} = ٦ \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$

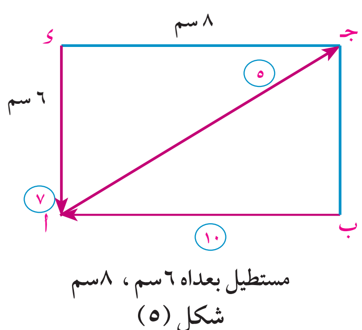
فإن: أ = ... ، ب = ...

④ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المبينة فى كل شكل من الأشكال الآتية:

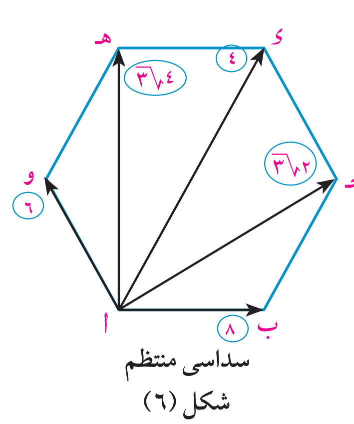




مثلث متساوى الساقين
شكل (٤)



مستطيل بعداه ٦ سم ، ٨سم
شكل (٥)



سداسى منتظم
شكل (٦)

⑤ أثرت القوى ٣ ، ٦ ، ٩$\sqrt{3}$ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

⑥ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثِّر فى نقطة مادية، الأولى نحو الشرق، والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال، والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

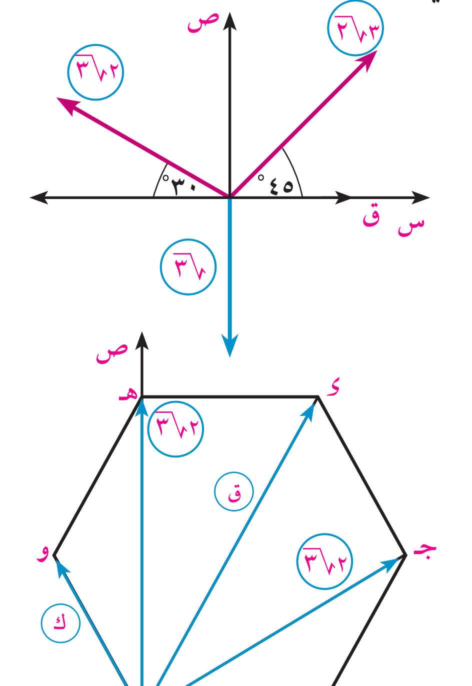
⑦ أربع قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠$\sqrt{3}$ ، ٤٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية، الأولى تؤثر فى اتجاه الشرق، والثانية تؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق، والثالثة تؤثِّر فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب، والرابعة تؤثِّر فى اتجاهٍ يصنع ٦٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

⑧ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تَلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{م جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

⑨ أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٥سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤$\sqrt{2}$ ، ٩ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

⑩ إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ = -١٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overleftarrow{\text{ع}}$ = (١٠$\sqrt{2}$ ، ١٣٥°). أوجد قيمتي أ ، ب.

⑪ فى الشكل المقابل: إذا كان مقدار محصلة القوى تساوى ٢$\sqrt{3}$ نيوتن، فأوجد قيمة ق، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى.



⑫ الشكل المقابل يمثل شكل سداسي منتظم : إذا كانت محصلة القوى تساوى ٢٠ ث كجم، وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ أوجد قيمتى ق ، ك .



اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

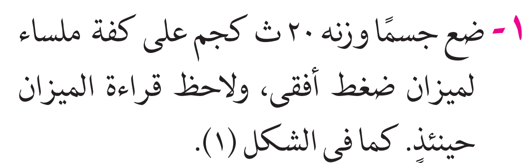
Equilibrium of a rigid body under the action of coplanar forces meeting at a point

إذا أثرت قوتان أو أكثر فى جسم جاسئ، ولم يتغير وضع الجسم قيل إن هاتين القوتين أو هذه القوى متزنة، وأن الجسم متزن ، ويعد أبسط أنواع الاتزان هو الناتج عن تأثير قوتين فى جسم جاسئ.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

Equilibrium of a rigid body under the action of two forces

عمل تعاونى



١- ضع جسمًا وزنه ٢٠ ث كجم على كفة ملساء لميزان ضغط أفقى، ولاحظ قراءة الميزان حينئذٍ. كما فى الشكل (١).

٢- اطلب من زميلك أن يربط نفس الجسم بخيط خفيف أملس، ويربط نهاية الخيط فى خُطاف ميزان زنبركى، ويلاحظ قراءة الميزان فى وضع السكون.

٣- قارن بين النتائج فى كل من التجربتين، ماذا تلاحظ؟

رد فعل الميزان

شكل (١)

وزن الجسم ٢٠ ث كجم

الشد فى الخيط

شكل (٢)

وزن الجسم ٢٠ ث كجم

ر = ٢٠ ث كجم　　ش = ٢٠ ث كجم

و = ٢٠ ث كجم　　و = ٢٠ ث كجم

نلاحظ أن:

➢ كل من قوتى رد الفعل ر فى التجربة الأولى وقوة الشد فى الخيط ش فى التجربة الثانية تساوى ٢٠ ث كجم وهو وزن الجسم.

تعلم



شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان:

١- متساويتين فى المقدار.

٢- متضادتين فى الاتجاه.

٣- خطى عملهما على استقامة واحدة.

سوف تتعلم

- اتزان جسم تحت تأثير قوتين.
- اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة.
- قاعدة مثلث القوى.
- قاعدة لامى.
- نظرية القوى الثلاث.
- اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

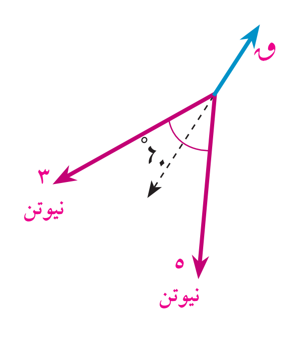
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قاعدة مثلث القوى. Triangle of forces rule
- قاعدة لامى. Lami`s rule
- مضلع القوى. Polygon of forces

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال



٣ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأوجد قيمة ق؟

الحل

نوجد محصلة القوتين ٥ ، ٣ نيوتن من القانون:

$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ $\therefore ع = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ × ٥ × ٣ جتا ٦٠°}$

$\therefore ع = \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٥} = \sqrt{٤٩} = ٧$ نيوتن

$\because$ القوة (ق) ومحصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن فى حالة اتزان. $\therefore$ ق = ٧ نيوتن

حاول أنْ تحل

١ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع القوتين المتعامدتين التى مقدار كل منها ٥ ، ١٢ نيوتن فأوجد قيمة ق.

نقل نقطة تأثير القوة إلى أى نقطة على خط عملها

نشاط



١ أحضر الأدوات الآتية:
ميزانًا زنبركيًّا - قرصًا رقيقًا من المعدن - خيطًا - ميزانًا مائيًّا - مسطرة.

٢ اضبط النضد أفقيًّا باستخدام الميزان المائى.

٣ صل القرص بخيطين عند الثقبين أ ، ب ثم اربط الطرفين الآخرين للخيطين بميزان الزنبرك.

٤ ثبت حلقة أحد الميزانين فى مسمار مثبت فى النضد عند نقطة (جـ) واجذب الميزان الآخر ثم ثبته عند نقطة (ى) فى مسمار آخر يبعد عن المسمار الأول بحيث يكون الخيطان مشدودين كما بالشكل .

٥ أوجد مقدار الشد المؤثر فى الخيط وسجل النتائج.

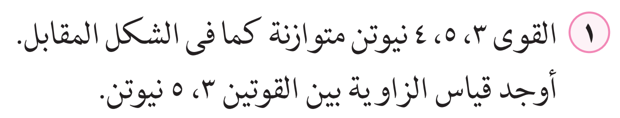
٦ غير موضع تثبيت طرف الخيط من النقطة أ، إلى النقاط $أ_١$، $أ_٢$، ... وكذلك تغيير الطرف الآخر للخيط من النقطة ب إلى النقاط $ب_١$، $ب_٢$، ... ولاحظ قراءة ميزان الزنبرك فى كل حالة وسجل النتائج - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنه **عند حدوث التوازن تتساوى القراءتان تمامًا .**

من النشاط السابق نستنتج أن :

> إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.

مثال



① القوى ٣، ٥، ٤ نيوتن متوازنة كما فى الشكل المقابل.
أوجد قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن.

الحل

∵ مجموعة القوى متزنة.

∴ محصلة القوتين ٣، ٥ نيوتن تتزن مع القوة ٤ نيوتن

ويفرض أن قياس الزاوية بين القوتين ٣، ٥ نيوتن ى فإن :

$ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى

بالتعويض عن : ع = ٤ ، $ق_١$ = ٣ ، $ق_٢$ = ٥

١٦ = ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥ جتا ى ٣٠ جتا ى = -١٨

أى أن جتا ى = $\frac{-٣}{٥}$

∴ ق(∠ى) = ١٨٠° - ٤٩َ ٧َ ٥٣° = ١١ً ٥٢َ ١٢٦°



حاول أنْ تحل

② إذا كانت القوى ٧، ٨، ١٣ نيوتن متوازنة فأوجد قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

Equilibrium of a rigid body under the action of three coplanar forces meeting at a point

سبق أن درست شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين ، وسوف ندرس توازن ثلاث قوى تقع خطوط عملها فى مستوى واحد وتتلاقى فى نقطة واحدة ، وهذه القوى إما أن تؤثر فى نقطة مادية (أوجسيم) أو تؤثر على جسم بحيث تتلاقى خطوط عملها فى نقطة واحدة.



تعلم

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففى الشكل المقابل :

لكى تتزن القوى الثلاث يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث .

تعبير شفهى :

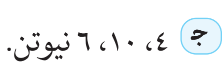
بين أيًّا من القوى التى لها المقادير الآتية يمكن أن تكون متزنة ؟ فسر إجابتك.
على اعتبار أن القوى تؤثر فى نقطة واحدة و فى اتجاهات مختلفة.

أ ٣، ٥، ٩ نيوتن



ب ٣، ٥، ٧ نيوتن





ج ٤، ١٠، ٦ نيوتن.



قاعدة مثلث القوى *Triangle of forces*

شكل (١): يمثل القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران على جسم جاسئ تعملان فى $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$

وتكون محصلة هاتين القوتين هي ($\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$) والتى تعمل فى القطر $\overleftarrow{و جـ}$ من متوازى الأضلاع و أ جـ ب.

$\overleftarrow{ق_3}$ = ($\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$) فى المقدار وتضادهما فى الاتجاه

أىْ أنَّ: $\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$ + $\overleftarrow{ق_3}$ = $\overleftarrow{٠}$ ∴ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ مجموعة متزنة.

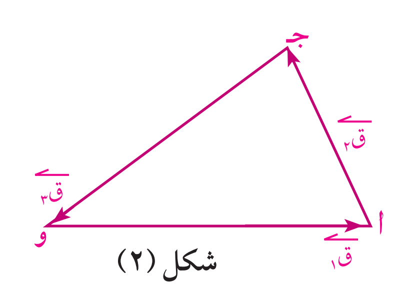
شكل (١)

تحقق من فهمك

بين أن مجموعة القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ مجموعة متزنة حيث :

$\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = -٣ $\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$

شكل (٢): يمثل مثلث القوى للمجموعة المتزنة $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ حيث إن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المتناظرة.



شكل (٢)

أىْ أنَّ: $\frac{ق_1}{و أ} = \frac{ق_2}{أ جـ} = \frac{ق_3}{جـ و}$

أى أن: إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

فكر: استخدم قاعدة الجيب لإثبات قاعدة مثلث القوى.

مثال

٢ عُلِّقَ ثُقل مقداره ١٢ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ١٣٠سم، والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسي، جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٥٠سم من الحائط. أوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

الحل

الثقل متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

- قوة الوزن (١٢ نيوتن) وتعمل رأسيًّا لأسفل.
- القوة الأفقية ق.
- الشد فى الخيط ش ويعمل فى $\overleftarrow{ب أ}$

نوجد طول $\overline{أ جـ}$ من فيثاغورث.

أ جـ = $\sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢}$ = ١٢٠ سم

المثلث ب أ جـ مثلث القوى:

$\frac{ش}{١٣٠} = \frac{١٢}{١٢٠} = \frac{ق}{٥٠}$

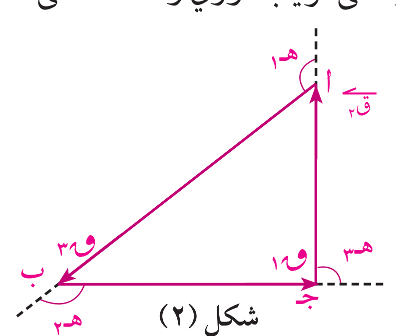
ش = ١٣ نيوتن ، ق = ٥ نيوتن

حاول أنْ تحل

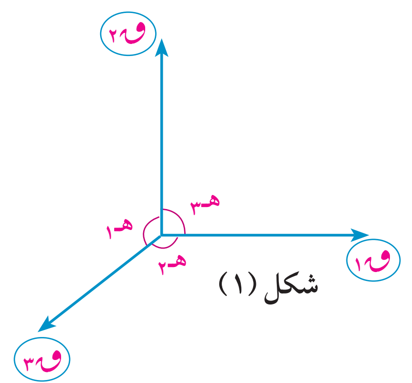
(٣) علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ٥٠سم، مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى سقف الحجرة أُزيح الثقل بقوة أفقية، حتى اتزن وهو على بعد ٤٠سم من السقف ، أوجد مقدار القوة الأفقية والشد فى الخيط.

قاعدة لامى *lami's rule*

إذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ فى نقطة مادية كما فى الشكل (١) وكانت متزنه فإنه يُمكن تَمثيلُها بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دوري واحد كما فى الشكل (٢)



شكل (٢)



شكل (١)

باستخدام قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{ب جـ}{جا (١٨٠° - هـ_1)} = \frac{أ جـ}{جا (١٨٠ - هـ_2)} = \frac{أ ب}{جا (١٨٠° - هـ_3)}$$

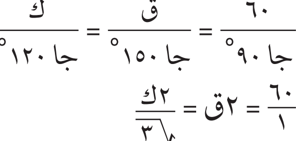
أيْ أنَّ

$$\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$$

> إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وغير متوازية و متلاقية فى نقطة فإن :
>
> $$\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$$

مثال

(٣) ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°. فأوجد مقدار كل من ق ، ك.



الحل

المجموعة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الآتية:

القوة ٦٠ نيوتن ، القوة ق نيوتن ، القوة ك نيوتن بتطبيق قاعدة لامى:

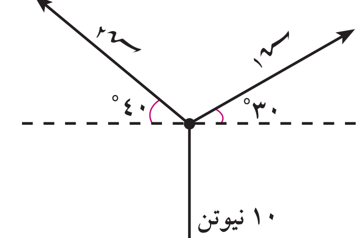
$$\frac{٦٠}{جا ٩٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ك}{جا ١٢٠°}$$

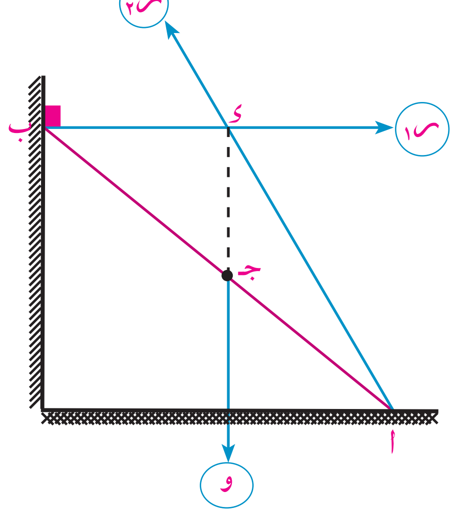
$$\frac{٦٠}{١} = ٢ق = \frac{٢ك}{\sqrt{٣}}$$

أيْ أنَّ: ق = ٣٠ نيوتن ، ك = $٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن

حاول أنْ تحل

(٤) فى **الشكل المقابل** ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقى بزاوية قياسها ٤٠°.
أوجد مقدار كل من $ش_1$ ، $ش_2$ فى حالة الاتزان.





قاعدة:

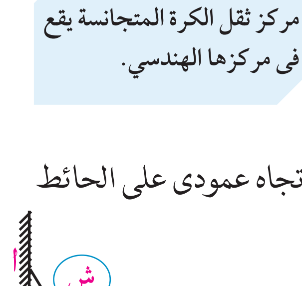
إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

مثال توضيحى: إذا اتزن قضيب منتظم السمك والكثافة وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن:

- مركز ثقل وزن القضيب يعمل فى منتصفه واتجاهه رأسيًا لأسفل.
- رد فعل الحائط الرأسي ($ر_١$) يكون عموديًا على الحائط و يعمل فى اتجاه $\overleftarrow{بى}$.
- رد فعل الأرض الأفقية الخشنة ($ر_٢$) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{أى}$ الذى يمر بالنقطة ى (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر_١}$) كما فى الشكل.

مثال

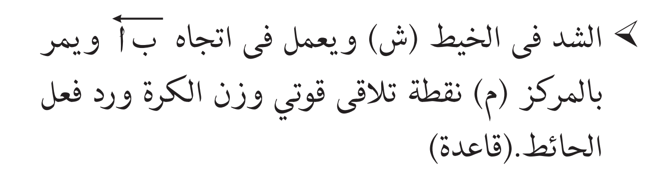
٤ كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ١,٥ ث كجم وطول نصف قطرها ٢٥سم ، ربطت من إحدى نقط سطحها ب بخيط طوله ٢٥سم ومربوط طرفه الآخر من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط.



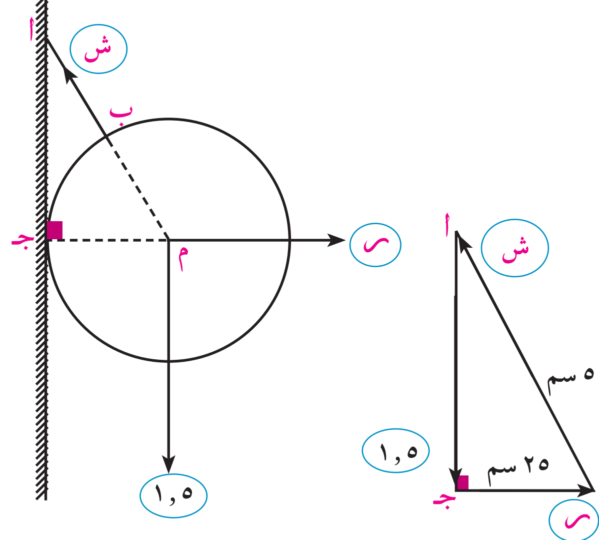
الحل

الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث:

- وزن الكرة ١,٥ ث كجم و يؤثر رأسيًا لأسفل.
- رد فعل الحائط على الكرة (ر) و يؤثر عند نقطة تماس الكرة مع الحائط، و يعمل فى اتجاه عمودى على الحائط مارًّا بالمركز (م).



- الشد فى الخيط (ش) و يعمل فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$ و يمر بالمركز (م) نقطة تلاقى قوتي وزن الكرة ورد فعل الحائط.(قاعدة)



المثلث م أ جـ هو مثلث القوى، حيث

م أ = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠سم

ومن نظرية فيثاغورث: أ جـ = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٢٥)^٢}$

= $٢٥\sqrt{٣}$ سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى:

$$\frac{ش}{٥٠} = \frac{١,٥}{٢٥\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٢٥}$$

أىْ أنَّ: ش = $\sqrt{٣}$ ث كجم ، ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ث كجم.

فكر: هل يمكنك حل المسألة السابقة بطرق أخرى؟ اذكر هذه الطرق ثم حل المسألة بإحدى هذه الطرق.

حاول أنْ تحل

٥ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠سم معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٠سم، ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلًّا من الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

مثال

٥ علق قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى خُطّاف ، فإذا كان الحبلان متعامدين، وطول أحدهما ٥٠سم. فأوجد مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا حرًّا مطلقًا وفى حالة اتزان.

الحل

القضيب متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزنه ٣٠ نيوتن، ويعمل رأسيًّا لأسفل ويؤثر عند منتصفه ، الشد فى الحبلين $ش_١$ ، $ش_٢$ ويعملان فى الاتجاهين $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ على الترتيب ويتقاطعان على التعامد عند نقطة جـ.

∵ $\overline{جـ ى}$ مرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

∴ جـ ى = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٥٠سم

∴ أ جـ ى مثلث متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ أ جـ ى) = ٦٠° ، ق(∠ ب جـ ى) = ٣٠°

أضف إلى معلوماتك

إذا مر خيط على بكرة ملساء، وكان الخيط مشدودًا فإن الشد على جانبى البكرة متساوى.

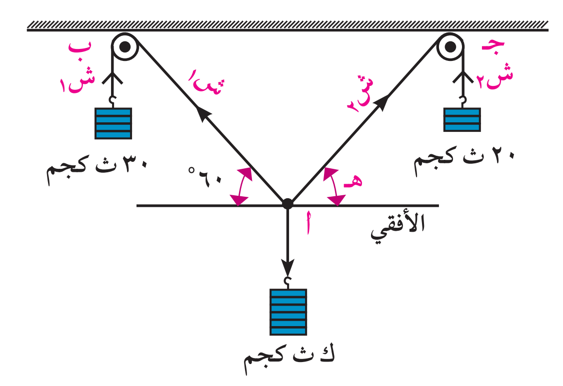
بتطبيق قاعدة لامى:

$\frac{ش_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ش_٢}{جا ١٢٠°} = \frac{٣٠}{جا ٩٠°}$ ومنها $ش_١$ = ١٥ نيوتن ، $ش_٢$ = ١٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

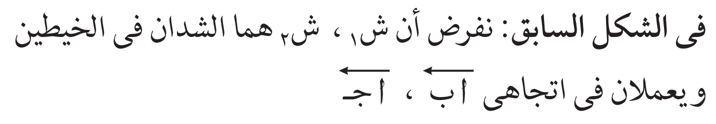
فكر: استخدم طرق أخرى لحل المسألة السابقة.

مثال

٦ **فى الشكل المقابل:** ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوتين عند ب ، جـ ويحملان ثقلين مقدار كل منهما ٣٠، ٢٠ث كجم. أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ فى وضع الاتزان



الحل



فى الشكل السابق: نفرض أن ش$_1$ ، ش$_2$ هما الشدان فى الخيطين

ويعملان فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

البكرتان ملساوتان لذلك فإن: ش$_1$ = ٣٠ ث كجم ، ش$_2$ = ٢٠ث كجم

الجسم الذى ثقله ك متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزن الجسم ك ث كجم والشد فى الخيطين ش$_1$ ، ش$_2$

بتطبيق قاعدة لامى:

$$\frac{٣٠}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ})} = \frac{٢٠}{\text{جا}(٦٠^\circ + ٩٠^\circ)} = \frac{\text{ك}}{\text{جا}[١٨٠^\circ - (\text{هـ} + ٦٠^\circ)]}$$ وبالتبسيط

$$\frac{٣٠}{\text{جتا هـ}} = ٤٠ = \frac{\text{ك}}{\text{جا}(\text{هـ} + ٦٠^\circ)}$$

أىْ أنَّ جتا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أي أن ق (∠هـ) = ٣٥″ ٢٤′ ٤١°

ك = ٤٠ × جا (٥″ ٢٤′ ٤١° + ٦٠°)

أىْ أنَّ ك ≃ ٣٩,٢١٠٧ ث كجم

حاول أنْ تحل

(٦) أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ث جم؛ حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأس تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط. أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط.

لاحظ أن

بكرة ملساء

ش ش

الشد متساوٍ فى طرفي الخيط.

تذكر أن

جا(٩٠° + هـ) = جتا هـ

جا (١٨٠° - هـ) = جا هـ

اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة

يمكن التعبير عن شرط توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة: إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة فإن المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى كل من اتجاهين متعامدين يساوى صفرًا.

لكى تكون مجموعة القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة متزنة يجب أن يكون:

- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ = صفر
- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ = صفر

أىْ أنَّ س = صفر ، ص = صفر

مثال

(١) إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = -٧ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ فأثبت أن مجموعة القوى $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ متوازنة.

الحل

$\because \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3}$

$\therefore \overleftarrow{ع} = (٥ - ٧ + ٢)\ \overleftarrow{س} + (-٣ + ٢ + ١)\ \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{٠}$ أىْ أنَّ مجموعة القوى متزنة.

حاول أنْ تحل

(٧) إذا كانت القوى $\overleftarrow{ق_1} = ٤\ \overleftarrow{س} - ٣\ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = -أ\ \overleftarrow{س} - ٢\ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = -٦\ \overleftarrow{س} + ب\ \overleftarrow{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

مثال

(٢) **الشكل المقابل:** يمثل القوى ١٦ ، ٢٠ ، $١٢\sqrt{٢}$ ، $٤\sqrt{٥}$ نيوتن ،والتى توثر فى المربع أ ب جـ ى فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أى}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{هـ أ}$ على الترتيب حيث هـ منتصف $\overline{جـ ى}$. أثبت أنَّ مجموعة القوى متزنة.



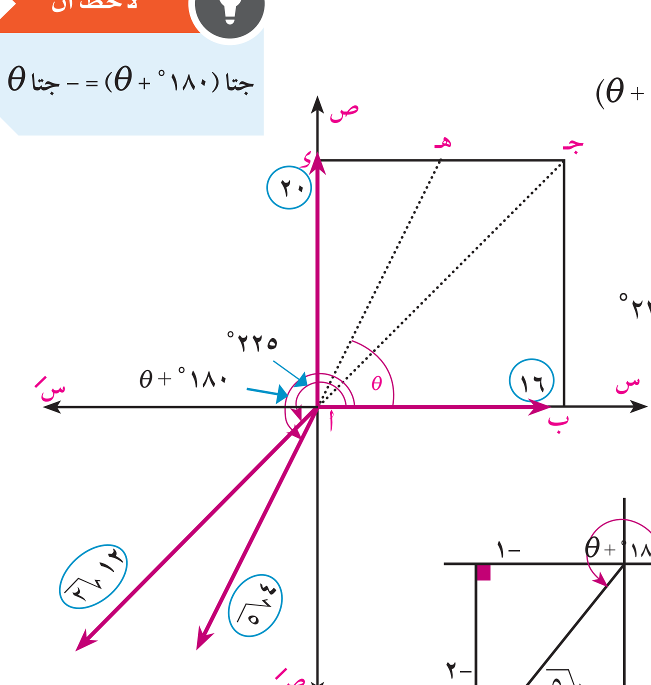
الحل

من الشكل المقابل نجد أن القوى ١٦ ، ٢٠ ، $١٢\sqrt{٢}$ ، $٤\sqrt{٥}$ نيوتن

زواياها القطبية هي: ٠° ، ٩٠° ، ٢٢٥° ، $(١٨٠° + \theta)$

لاحظ أن

$جتا\ (١٨٠° + \theta) = -\ جتا\ \theta$



$\therefore س = ١٦\ جتا\ ٠° + ٢٠\ جتا\ ٩٠°$

$+ ١٢\sqrt{٢}\ جتا\ ٢٢٥° + ٤\sqrt{٥}\ جتا\ (١٨٠° + \theta)$

$= ١٦ + ٠ - ١٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - ٤\sqrt{٥} \times جتا\ \theta$

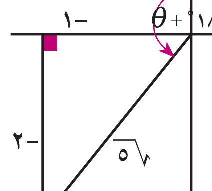
$= ١٦ - ١٢ - ٤\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} = صفر$

$ص = ١٦\ جا\ ٠° + ٢٠\ جا\ ٩٠° + ١٢\sqrt{٢}\ جا\ ٢٢٥°$

$+ ٤\sqrt{٥}\ جا\ (١٨٠° + \theta)$

$= ٠ + ٢٠ - ١٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - ٤\sqrt{٥}\ جا\ \theta$

$= ٢٠ - ١٢ - ٤\sqrt{٥} \times \frac{٢}{\sqrt{٥}} = صفر$

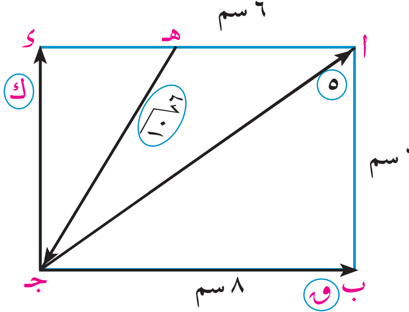


س = صفر ، ص = صفر

$\therefore$ المجموعة متزنة.

٩ حاول أنْ تحل

٨ الشكل المقابل: يمثل القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{10}$ نيوتن والمتزنة، والتى تؤثر فى المستطيل أ ب جـ ء فى الاتجاهات $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$، $\overleftarrow{هـ جـ}$ حيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ هـ = ٦سم. أوجد قيمة ق ، ك.





تمارين (١ - ٤)

أكمل مايأتى:

١ الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هندسيًّا بـ ....

٢ شرط اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هى أن تكون .... ، ....

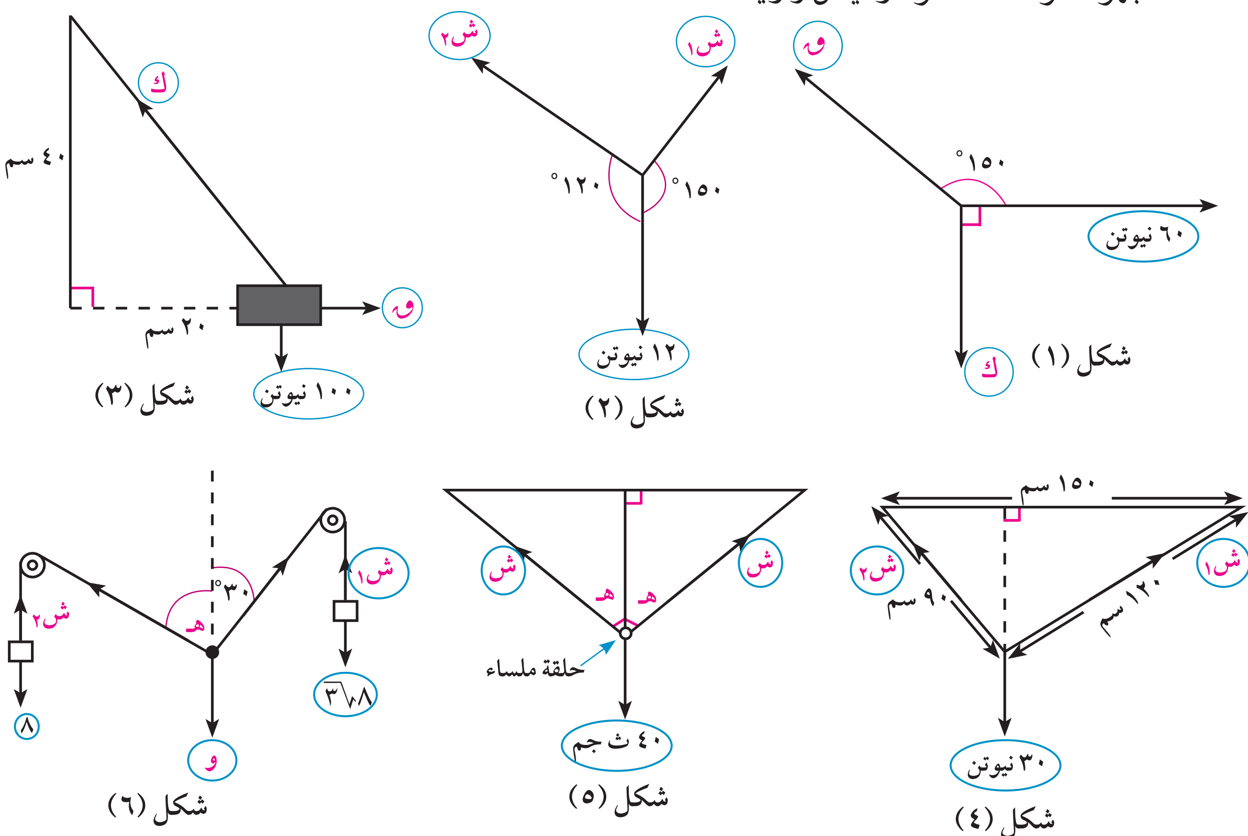
٣ إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = -٧ $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = أ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن:

أ = ... ، ب = ...

٤ إذا كانت القوة التى مقدارها ق متزنة مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن فإن مقدار ق = ...

٥ إذا مُثلت ثلاث قوى مستوية ومتزنة ومأخوذة فى اتجاه دورى واحد بأضلاع مثلث فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع ....

٦ يمثل كل شكل من الأشكال الآتية مجموعة من القوى المستوية المتزنة والمتلاقية فى نقطة. أوجد القيمة المجهولة سواء كانت قوة أو قياس زاوية:



(٧) أ ب سلم منتظم وزنه ١٢ ث كجم يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن الأرض ٤ متر والطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٣متر. أوجد في وضع الاتزان الضغط على كل من الحائط والأرض.

(٨) أ ب قضيب منتظم طوله ٦٠سم وزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة جـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠سم أوجد كلاً من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عن أ.

(٩) كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة ٦٠ نيوتن.

(١٠) أ ب قضيب منتظم وزنه (و) ث كجم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى . أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ على القضيب عند ب فأتزن القضيب وهو يميل على الرأس بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ ورد فعل المفصل.

(١١) علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث جم من أحد طرفى خيط طوله ٢٨سم، مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى سقف حجرة، أثرت على الجسم قوة فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤سم رأسيًّا أسفل السقف ، فإذا كانت القوة فى وضع الاتزان عمودية على الخيط فأوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

(١٢) علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠سم ، ٨٠سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

(١٣) علق جسيم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم. فأوجد هـ ومقدار الشد فى الخيط الثاني.

(١٤) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

(١٥) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.

(١٦) كرة معدنية ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط الرأسى والمستوى المائل.

(١٧) علق قضيب منتظم طوله ٥٠سم ووزنه ٢٠ نيوتن من طرفيه بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة. فإذا كان طولا الخيطين ٣٠سم ، ٤٠سم على الترتيب فأوجد الشد فى كل من الخيطين.

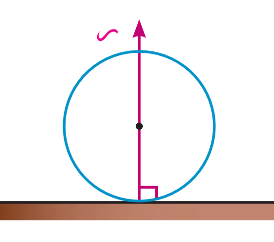


اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

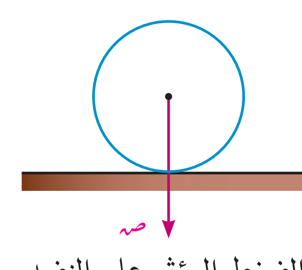
Equilibrium of a body on a horizontal rough plane

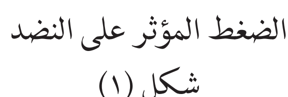
للاحتكاك فوائد هامة ؛ فهو يجعل عجلات السيارة تتحرك على الطريق، ويجعل عجلات القاطرة تُمسك بقضبان السكك الحديدية. وهو يسمح للسير الناقل بأن يدير البكرة دون انزلاق. وأنت لا تستطيع السير دون الاحتكاك لتمنع حذاءك من التزحلق على الرصيف. ولهذا فمن الصعب السير على الجليد ؛ حيث أن السطح الأملس لا يسبب احتكاكاً ، وبذلك لا يسمح للحذاء بالانزلاق. ويثبت التربة على سطح الجبال ويثبت البنايات ويجعلها قائمة. ويجعل الحبال المربوطة تبقى ثابتة. بالإضافة إلى العديد من الفوائد الأخرى .

رد الفعل:



تعلمنا فيما سبق نوعا من القوى ينشأ عند تلامس جسمين يطلق عليه اسم رد الفعل . فإذا وضعت كرة على نضد أفقى ساكن فإن الكرة تؤثر على النضد بقوة ضغط (ص) تساوى وزن الكرة فى هذه الحالة وطبقًا للقانون الثالث لنيوتن فإن النضد يؤثر على الكرة بقوة رد فعل (ر) وتساوى ضغط الكرة على النضد؛ أي أن ر = ص .





الضغط المؤثر على النضد

شكل (١)

ر

رد الفعل المؤثر على الكرة

شكل (٢)

السطوح الملساء والسطوح الخشنة :

Smooth Surfaces and Rough Surfaces

يفسر العلماء منشأ قوى الاحتكاك بين الأجسام إلى وجود نتوءات وتجويفات مجهرية فى سطوح الأجسام مهما بلغت نعومتها وينتج عن تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ما يسمى بقوة الاحتكاك ، وبالتالى نجد مقاومة عند محاولة تحريك أحد السطحين على السطح الأخر ، ويعتبر معامل الاحتكاك مقياسا

سوف تتعلم

- السطوح الملساء والسطوح الخشنة .
- مفهوم الاحتكاك
- قوة الاحتكاك السكونى
- قوة الاحتكاك الحركى
- العلاقة بين معامل الاحتكاك وظل زاوية الاحتكاك
- خواص الاحتكاك
- اتزان جسم على مستوى أفقى خشن.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- الاحتكاك Friction
- سطح أملس Smooth Surface
- سطح خشن Rough Surface
- رد الفعل العمودي Normal Reaction
- قوة الاحتكاك السكونى Static Friction
- قوة الاحتكاك الحركى Kinetic Friction
- قوة الاحتكاك السكونى النهائى Limiting Static Friction
- رد الفعل المحصل Resultant Reaction
- زاوية الاحتكاك Angle of Friction
- مستوى أفقى خشن Horizontal rough plane

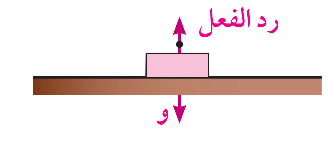
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

لدرجة خشونة الأسطح، فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة والعكس صحيح ، وإذا ساوى معامل الاحتكاك الصفر انعدمت قوى الاحتكاك تماماً.

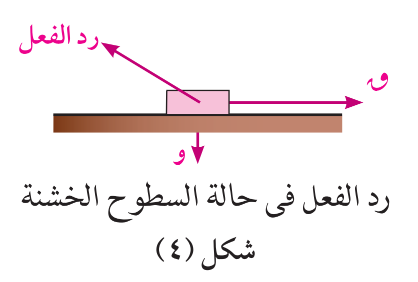
يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم، ففى حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.

أما إذا كان الجسمان خشنين فيكون لرد الفعل مركبة فى اتجاه سطح التماس تسمى بالاحتكاك السكونى ، كما يكون لرد الفعل مركبة عمودية على سطح التماس تسمى برد الفعل العمودى.



رد الفعل فى حالة السطوح الملساء

شكل (٣)



رد الفعل فى حالة السطوح الخشنة

شكل (٤)

خواص قوة الاحتكاك السكونى:

(١) تعمل قوة الاحتكاك السكونى (ع) على معاكسة الانزلاق فتكون فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الانزلاق فيه.

(٢) تكون قوة الاحتكاك السكونى (ع) مساوية فقط للقوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم ولايمكن ان تزيد عن هذه القوة وتظل مساوية لهذه القوة طالما الجسم متزنًا.

(٣) وتتزايد قوة الاحتكاك السكونى (ع) كلما تزايدت القوة المماسية التى تعمل على إحداث الحركة حتى تصل إلى حد لاتتعداه وعند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق ويسمى الاحتكاك فى هذه الحالة بالاحتكاك السكونى النهائى ويرمز له بالرمز ($ع_س$).

(٤) النسبة بين الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى ثابتة وتتوقف هذه النسبة على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما او كتلتهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى ويرمز لها بالرمز $م_س$.

أى أن $م_س = \frac{ع_س}{ر}$ حيث $ع_س$ الاحتكاك السكونى النهائى

قوة الاحتكاك الحركى *Friction Kinetic*

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى ($ح_ك$) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته، وتعطى قيمتها بالعلاقة: $ح_ك = م_ك ر$ حيث:

حيث $م_ك$ هو معامل الاحتكاك الحركى Coefficient of Kinetic Friction ، $ر$ رد الفعل العمودى

أى أن: قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودية .

ومن ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

أى أن: $م_ك = \frac{ح_ك}{ر}$ حيث $ح_ك$ قوة الاحتكاك الحركى

رد الفعل المحصل ($ر'$) *Resultant Reaction*

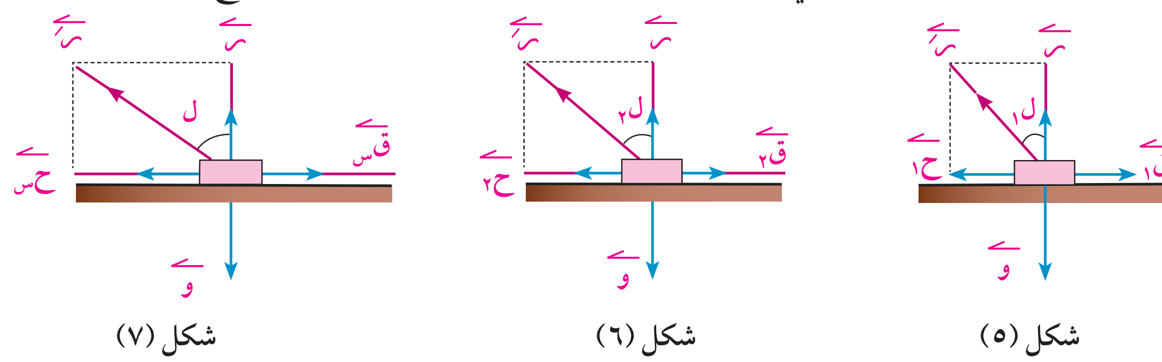
في حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك السكونى . ويسمى رد الفعل المحصل (رد فعل المستوى) أو رد الفعل الكلي.



تعريف: رد الفعل المحصل ($\overleftarrow{ر'}$) هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك السكونى $\overleftarrow{ح}$

زاوية الاحتكاك *Angle of Friction*

نلاحظ أن قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل تتزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك (بفرض ثبوت مقدار قوة رد الفعل العمودي) وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى ل عندما يصبح الاحتكاك نهائياً . وتسمى الزاوية في هذه الحالة (زاوية الاحتكاك) والأشكال التالية توضح ذلك.



شكل (٧) شكل (٦) شكل (٥)

من شكل (٥) ، شكل (٦) نجد أن: متجه رد الفعل المحصل $\overleftarrow{ر'}$ هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك $\overleftarrow{ح}$ أى أن: $ر' = \sqrt{ر^٢ + ح^٢}$

ومن شكل (٧) عندما يكون الاحتكاك نهائيًا:

$\therefore ر' = \sqrt{ر^٢ + ح_س^٢}$ $\because ح_س = م_س ر$ $\therefore ر' = \sqrt{ر^٢ + ر^٢ م_س^٢}$ $\therefore ر' = ر \sqrt{١ + م_س^٢}$

العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك :

فى حالة الاحتكاك النهائى من شكل (٨) :

نجد أن : ظال = $\frac{ح_س}{ر}$ ولكن $\frac{ح_س}{ر}$ = م$_س$

أى أن : م$_س$ = ظا ل

أى أنه عندما يكون الاحتكاك نهائيا فإن معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك

تفكير ناقد: قارن بين قياسى زاويتي الاحتكاك السكونى والاحتكاك الحركى.

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

Equilibrium of a body on a rough horizantal plane

إذا وضع جسم وزنه و على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ق تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم فى وضع التوازن يكون متزنا تحت تأثير القوى :

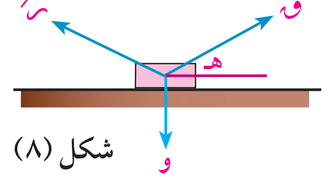


١) قوة الوزن $\overrightarrow{و}$ رأسيا لأسفل ومقدارها و



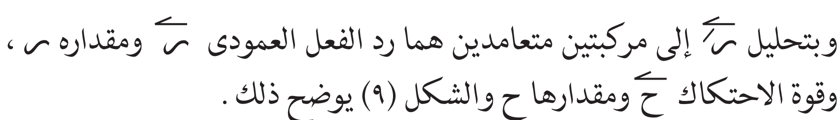
٢) قوة رد الفعل المحصل $\overrightarrow{ر'}$ ومقدارها ر'

٣) القوة $\overrightarrow{ق}$ ومقدارها ق والشكل (٨) يوضح ذلك .



شكل (٨)

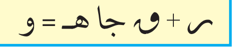
وبتحليل القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه فإن مقدارهما يكون ق جتا هـ ، ق جا هـ .



وبتحليل $\overrightarrow{ر'}$ إلى مركبتين متعامدين هما رد الفعل العمودى $\overrightarrow{ر}$ ومقداره ر ، وقوة الاحتكاك $\overrightarrow{ح}$ ومقدارها ح والشكل (٩) يوضح ذلك .

ر
ق جا هـ
ح
ق جتا هـ
و

شكل (٩)

فتكون معادلتا اتزان الجسم هما : ح = ق جتا هـ ،  ر + ق جا هـ = و

مثال

القوة المؤثرة على جسم

١) يدفع كريم صندوقا ممتلئا بالكتب إلى سيارته على طريق أفقى ، فإذا كان وزن الصندوق والكتب ١٢٤ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى بين الطريق والصندوق ٠,٤٥ فما مقدار القوة الأفقية التى يدفع بها كريم الصندوق حتى يكون على وشك الحركة.



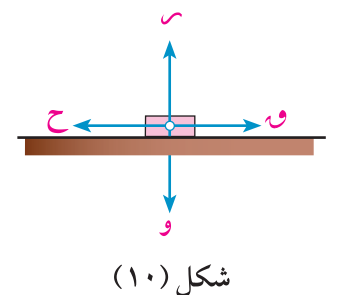
الحل

بإعتبار أن و = ١٢٤ نيوتن ، م$_س$ = ٠,٤٥

من شروط اتزان جسم على مستوى أفقى فإن :

ر = و أى أن : ر = ١٢٤ (١)

ق = م$_س$ ر ومن (١) تكون : ق = ٠,٤٥ × ١٢٤ = ٥٥,٨ نيوتن



شكل (١٠)

حاول أن تحل

١) وضعت كتله وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى افقى خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

أ) اذا كانت ق = ٨ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والمستوى

ب) اذا كان م$_س$ = ٠,٤ فأوجد ق

مثال قوة الاحتكاك

(٢) وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على نضد أفقى وربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ١,٥ ث كجم . فإذا كان الجسم متزنًا على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا عُلم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{1}{4}$. هل يكون الجسم على وشك الحركة؟ فسر إجابتك.

الحل

من اتزان الجسم المتدلى رأسيًا نجد أن ش = ١,٥ث كجم ومن اتزان الجسم الموضوع على النضد الأفقى نجد أن :

ر = و



∴ ر = ٨ ث كجم

∴ قوة الاحتكاك ح = ش

∴ ح = ١,٥ ث كجم

شكل (١١)

لمعرفة ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ، نعين أقصى قيمة ممكنه لمقدار قوة الاحتكاك السكونى حس

∵ حس = مس ر

∴ حس = $\frac{1}{4}$ × ٨ = ٢ ث كجم.

∴ ح < حس لذلك فإن الاحتكاك غير نهائى ولا يكون الجسم على وشك الحركة.

حاول أن تحل

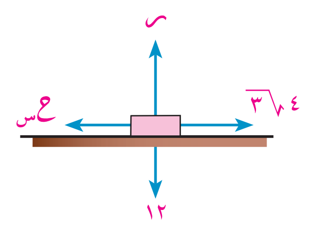
(٢) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{1}{4}$ أوجد :

أ) مقدار القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة .

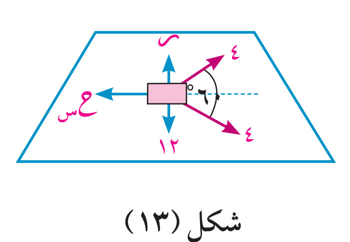
ب) القوة التى تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠° وتجعل الجسم على وشك الحركة .

مثال زاوية الاحتكاك

(٣) وضع جسم وزنه١٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٤ ، ٤ ث كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك.



شكل (١٢)



شكل (١٣)

الحل

∵ **الجسم على وشك الحركة**

الجسم فى حالة اتزان نهائى

∴ ر = و

∴ ر = ١٢ ث كجم

، محصلة القوتين ٤، ٤ ث كجم = قوة الاحتكاك النهائى

∵ $ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$

∴ $ح = \sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢ + ٢ × ٤ × ٤ × \frac{١}{٢}} = ٤\sqrt{٣}$ ث كجم

∵ $م_س ر = ح$ ∴ $١٢ م_س = ٤\sqrt{٣}$

∴ $م_س = \frac{٤\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ∵ $م_س =$ ظا ل

∴ ظا ل $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ∴ ل = ٣٠°

حاول أن تحل

③ وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل ساكنا . أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم والمستوى يجب أن لا تقل عن ٣٠° .

وإذا كانت ل = ٤٥° وبقى اتجاه القوتين ثابتا ، كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير ، فعين مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك أن يبدأ الحركة.

مثال البرهنة النظرية

④ وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل . شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها هـ وتقع فى المستوى الرأسى المار بوزن الجسم فأصبح الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة يساوى $\frac{و جا ل}{جتا (هـ - ل)}$ ، ثم أوجد أصغر مقدار لهذه القوة وشرط حدوث ذلك.

الحل

∵ $\overleftarrow{ر}$ هى محصلة القوتين ر ، $ح_س$:

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى: $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر}$

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ق}{جا (١٨٠° - ل)} = \frac{و}{جا [٩٠° - (هـ - ل)]}$

∵ $\frac{ق}{جا ل} = \frac{و}{جتا (هـ - ل)}$ ∴ $ق = \frac{و جا ل}{جتا (هـ - ل)}$

شكل (١٤)

∵ المطلوب هو أصغر مقدار للقوة $\overleftarrow{ق}$ ، فيكون المقدار جتا (هـ - ل) أكبر ما يمكن

∴ جتا (هـ - ل) = ١ ∴ ق = و جا ل والشرط اللازم هو :

جتا (هـ - ل) = جتا ٠ ∴ هـ - ل = ٠ ∴ هـ = ل

∴ الشرط اللازم هو أن تكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى يساوى قياس زاوية الاحتكاك

حاول أن تحل

④ وضع جسم وزنه (و) ث كجم على مستو أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (٢ل) لأعلى وتقع فى المستوى الرأسى المار بوزن الجسم جعلت الجسم على وشك الحركة . أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و ظا ل .

تمـــارين ١ – ٥

أولا : أكمل ما يأتى :

(١) تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنين بقوة ....

(٢) تنعدم قوى الاحتكاك ويكون معامل الاحتكاك مساويا للصفر فى السطوح ....

(٣) عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون ....

(٤) قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى ....

(٥) محصلة قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى النهائى تسمى ....

(٦) قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى فى قوة ....

(٧) إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين كتلة مقدارها ٤٠ كجم وسطح الأرض يساوى ٠,٤٥ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر على الكتلة وتجعلها على وشك الحركة تساوى ....

(٨) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان مقدار قوة الاحتكاك السكونى ٤ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

ثانيا : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) يدفع فتى حجرا وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الحجر والرصيف.

(١٠) جسم وزنه ٢٤٠ ث كجم وضع على مستوٍ أفقي خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة.

(١١) وضع جسم وزنه ٣٩ ث جم على مستوى أفقي خشن، أثرت عليه قوتان أفقيتان مقدارهما ٧، ٨ ث جم وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة. أوجد معامل الاحتكاك السكونى.



اتزان جسم على مستوى مائل خشن

Equilibrium of a body on an Inclined rough plane

سوف تتعلم

- شروط اتزان جسم على مستوى مائل خشن
- العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .
- تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين (نشاط).

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مستوى مائل خشن Inclined rough plane
- رد الفعل العمودى Normal Reaction
- رد الفعل المحصل Resultant Reaction
- زاوية الاحتكاك Angle of Friction
- معامل الاحتكاك Coefficient of Friction

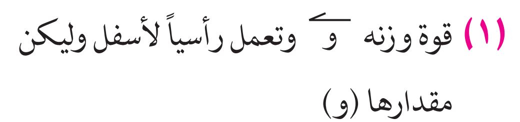
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فى هذا الدرس سوف ندرس اتزان جسم على مستوى مائل خشن .

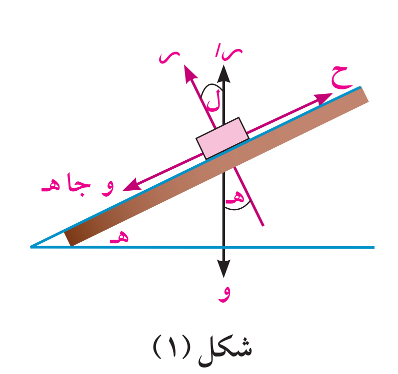
نعتبر أن جسما متزنا على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ .

يتزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :



(١) قوة وزنه $\overrightarrow{و}$ وتعمل رأسياً لأسفل وليكن مقدارها (و)

(٢) قوة رد الفعل المحصل وليكن مقدارها (ر́)



شكل (١)

ومن شروط الاتزان نجد أن :

قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسياً لأعلى .

ويكون : ر́ = و .... (١)

يمكن الان تعيين قوتى الاحتكاك ورد الفعل العمودى باعتبارهما مركبتى قوة رد الفعل المحصل فى اتجاهين أحدهما يوازى المستوى والآخر عمودى عليه كما فى الشكل المقابل .

قوة الاحتكاك .

ح = و جا هـ .... (٢)

وتعمل هذه القوة عكس اتجاه الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل وتكون موجهة لأعلى المستوى .

قوة رد الفعل العمودى .

ر = و جتا هـ .... (٣)

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

البرهان :

∵ الاحتكاك نهائى

∴ قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك السكونى وليكن قياسها (ل) .

ومن الشكل السابق نجد أن : هـ = ل

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالآتى :

ظا ل = م $_{س}$ أو م $_{س}$ = ظا هـ

فمثلا :

إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الحركة بتاثير وزنه فقط عندما كانت زاوية ميل المستوى على الافقى قياسها ٣٠° . فإن معامل الاحتكاك السكونى م $_{س}$ = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال

(١) وضع جسم وزنه ٣ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم يساوى $\frac{٢}{٣}$. أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزنا . عين قوة الاحتكاك عندئذ وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل

بتحليل وزن الجسم $\overleftarrow{و}$ إلى مركبتين فى اتجاه المستوى والعمودى عليه .

١) المركبة المماسية فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى إلى أسفل ومقدارها و جا هـ = ٣ جا ٣٠° = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن

٢) المركبة العمودية على المستوى ومقدارها و جتا هـ = ٣ جتا ٣٠° = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن

وبالمقارنة بين مقدار المركبة المماسية للوزن و جا هـ = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن ، مقدار القوة المؤثرة على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى = ٢ نيوتن نجد أن : ق > و جا هـ

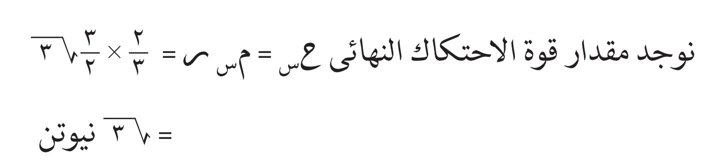
لذلك فإن الجسم يميل إلى التحرك لأعلى المستوى ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك $\overleftarrow{ح}$ فى عكس الاتجاه أى فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى لأسفل وبذلك يكون :

ق = ح + و جا هـ ∴ ٢ = ح + $\frac{٣}{٢}$ ∴ ح = $\frac{١}{٢}$ نيوتن

ر = و جتا هـ ∴ ر = ٣ جتا ٣٠° ∴ ر = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ نيوتن

مقدار الاحتكاك = $\frac{1}{2}$ نيوتن ويعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل

للتعرف على ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا



نوجد مقدار قوة الاحتكاك النهائى $ح_س$ = $م_س$ ر = $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3}$

= $\sqrt{3}$ نيوتن

ر، ٢، ٣ جا ٣٠°، ٣٠°، ٣٠°، ح، ٣ جتا ٣٠°، ٣

شكل (٢)



فنجد أن : ح < $ح_س$ أى أن الاحتكاك غير نهائى

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة .



حاول أن تحل

(١) وضع جسم وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$. أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢,٥ ث كجم، فإذا كان الجسم متزنا . عين قوة الاحتكاك عندئذ وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا؟

تفكير ناقد: إذا وضع جسم على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وكان قياس زاوية الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى (ل) - ماذا تتوقع أن يحدث للجسم إذا كان :

(أ) هـ < ل　　　　(ب) هـ > ل

مثال

(٢) وضع جسم وزنه ١٠ ث كجم على مستو مائل خشن تؤثر عليه قوة $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى، فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٦ ث كجم ويكون على وشك الحركة إلى اسفل المستوى عندما ق = ٤ ث كجم .أوجد :

(أ) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

(ب) معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى .

الحل

عندما ق = ٦ ث كجم يكون الجسم على وشك الحركةإلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك السكونى نهائيا ويعمل إلى أسفل المستوى .

∴ $ر_1$ = ١٠ جتا هـ　　، ٦ = ١٠ جاهـ + $م_س$ $ر_1$ وبحذف $ر_1$ من المعادلتين :

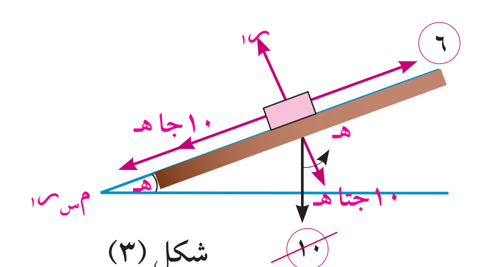
∴ ١٠ جا هـ + ١٠ $م_س$ جتا هـ = ٦ .... (١)

عندما ق = ٤ ث كجم يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك السكونى نهائيا ويعمل إلى لأعلى المستوى .

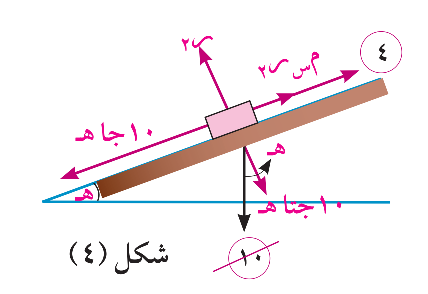
∴ $ر_{٢}$ = ١٠ جتا هـ ، ٤ + $م_{س}$ $ر_{٢}$ = ١٠ جا هـ وبحذف $ر_{٢}$

من المعادلتين :

∴ ١٠ $م_{س}$ جتا هـ = ١٠ جا هـ - ٤ .... (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

من (١) ، (٢) :

∴ ٦ = ١٠ جا هـ + ١٠ جا هـ − ٤ ∴ ٢٠ جا هـ = ١٠

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

وبالتعويض فى رقم (٢)

∴ ١٠ $م_{س}$ جتا ٣٠° = ١٠ جا ٣٠° − ٤

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٠ م = ٥ − ٤ ∴ $م_{س}$ = $\frac{١}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

حاول أن تحل

(٢) وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا زيد ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار :

أ) أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتمنعه من الانزلاق .

ب) القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط اكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

تمـــارين ١ – ٦

أولا: ضع علامة (✓) أو علامة (✗):

١) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على شكليهما وكتلتيهما.

٢) تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى بمعامل الاحتكاك.

٣) ظل زاوية الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى

٤) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

٦) زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى وقوة رد الفعل المحصل.

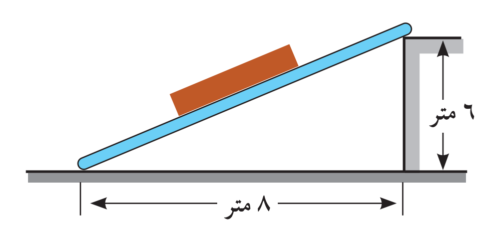
ثانيا: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

٣٠°

٦ نيوتن

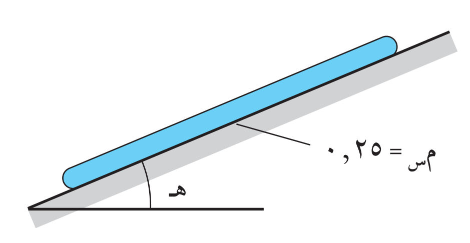
٧) **فى الشكل المقابل**: إذا كان الجسم على وشك الانزلاق لأسفل فإن قوة الاحتكاك النهائى تساوى :

أ ٣	ب ٢ √٣
ج ٣ √٣	د ٩



٨) **فى الشكل المقابل**: الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى :

أ ٣٦,٨٧°	ب ٤١,٤١°
ج ٤٨,٥٩°	د ٥٣,١٣°



٩) **فى الشكل المقابل**:

الجسم على وشك الأنزلاق أسفل المستوى فيكون هـ =

أ ١٤,٠٤°	ب ١٤,٤٨°
ج ٧٥,٥٢°	د ٧٥,٨٧°

ثالثا: أجب عن الأسئلة الاتية

١٠ وضع جسم وزنه ٤٠٠ ث . جم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$. أثرت على الجسم قوة مقدارها ٥٠ ث جم فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . إذا كان الجسم متزنا فعين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .

١١ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$. بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، واوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . ثم اوجد مقدار القوة التى تؤثر على هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث يكون الجسم على وشك الحركة إلى اعلى المستوى .

١٢ وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فوجد أن القوة التى توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى ٢ و جا هـ . اثبت أن :

أ قياس زاوية الاحتكاك = هـ   ب مقدار رد الفعل المحصل = و

١٣ وضع جسم وزنه ٢٥ ث . كجم على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة مقدارها ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ١٥ ث . كجم ويكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما ق = ١٠ ث . كجم فأوجد :

أ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى   ب معامل الاحتكاك السكونى

١٤ وضع جسم وزنه ٨ ث . كجم على مستوى افقى خشن ثم اميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق اسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° . أوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى، وإذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

أ مقدار قوة الشد   ب مقدار رد الفعل العمودى

الوحدة الثانية



الهندسة و القياس

Geometry and Measurement

مقدمة الوحدة

نشأت الهندسة فى بدايتها مرتبطة بالناحية العملية، فاستخدمها قدماء المصريين فى تحديد مساحات الأراضى وبناء الأهرامات والمعابد فأوجدوا مساحات بعض الأشكال وحجوم بعض المجسمات. وعندما زار طاليس (٦٤٠ - ٥٤٦ ق.م) الإسكندرية راقت له طرق المصريين فى قياس الأرض وأطلق عليها كلمة Geo-metron المأخوذة عن اللغة اليونانية والمكونة من كلمتى Geo وتعنى الأرض، metron وتعنى قياس واهتم بدراسة الهندسة على أنها تعبيرات صريحة مجردة خاضعة للبرهان.

تطورت الهندسة على يد الإغريق (طاليس - فيثاغورث- إقليدس) بظهور سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف مرتبة فى نظام منطقى دقيق ضمنه إقليدس فى كتابه الأصول المكون من ١٣ جزءًا، واستمرت الإسكندرية منارة المعرفة إلى أن جاء العرب، وحفظوا ذلك التراث بترجمته إلى اللغة العربية وأضافوا إليه إضافات كثيرة ونقلوه إلى أوربا فى القرن الثانى عشر.

فى القرن السادس عشر بدأ عصر النهضة فى الرياضيات وميلاد علوم جديدة فقدم ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) أسس الهندسة التحليلية وقام بتمثيل المعادلات بأشكال بيانية وهندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات، واستخلص معادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ كما توصل أويلر Euler إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة وهى:

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢.



مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يُعرف النقطة والمستقيم والمستوى فى الفراغ.
- يتعرف بعض المجسمات (الهرم - الهرم المنتظم - الهرم القائم - المخروط - المخروط القائم)، وخواص كل منها.
- يستنتج المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يستنتج حجم كل من الهرم القائم - المخروط القائم.
- يوجد معادلة الدائرة بدلالة إحداثيات كل من مركزها، وطول نصف قطرها.
- يستنتج الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يعين إحداثيات كل من مركز الدائرة، وطول نصف قطرها بمعلومية الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- ينمذج مواقف رياضية باستخدام قوانين الهندسة.



المصطلحات الأساسية

- النقطة The point
- المستقيم Straight line
- المستوى plane
- الفراغ Space
- رأس Vertex
- قاعدة Base
- محور Axis
- دائرة Circle
- مركز Center
- نصف قطر Radius
- قطر Diameter
- هرم Pyramid
- مخروط Cone
- وجه جانبى Lateral face
- حرف جانبى Lateral edge
- ارتفاع Height
- ارتفاع جانبى Slant height
- هرم منتظم Regular pyramid
- هرم قائم Right pyramid
- شبكة هرم Net of a pyramid
- مخروط دائرى قائم Right circular cone
- مساحة جانبية Lateral area
- مساحة كلية (سطحية) Surface area



الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب



دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): المستقيمات والمستوى

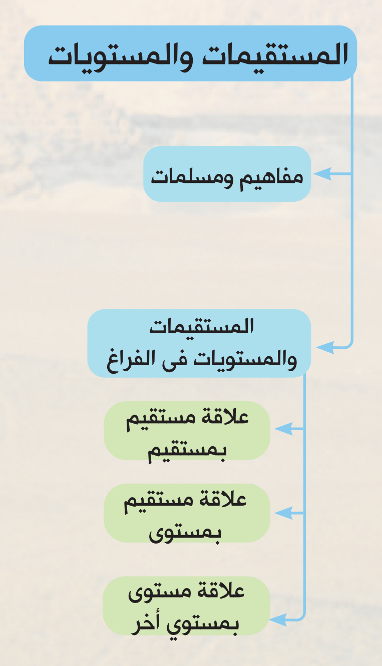
الدرس (٢ - ٢): الهرم والمخروط.

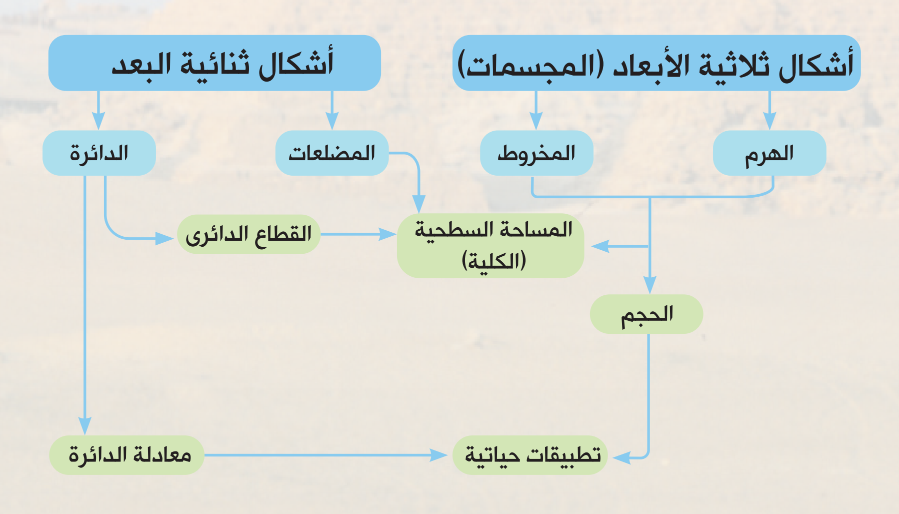
الدرس (٢ - ٣): المساحة الجانبية والمساحة الكلية للهرم والمخروط.

الدرس (٢ - ٤): حجم الهرم والمخروط

الدرس (٢ - ٥): معادلة الدائرة.

مخطط تنظيمى للوحدة







المستقيمات والمستويات فى الفراغ

The lines and the planes in a space

سوف تتعلم

- مفاهيم ومسلمات هندسية
- العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ
- العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ
- الأوضاع المختلفة لمستويين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- النقطة Point
- المستقيم Straight line
- المستوى Plane
- الفراغ Space

الأدوات والوسائل

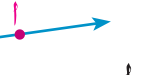
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب
- أدوات هندسية

فكر و ناقش

سبق أن درست بعض المفاهيم الرياضية حول كل من النقطة، والمستقيم، والمستوى فهل يمكنك الإجابة عن الأسئلة الآتية:

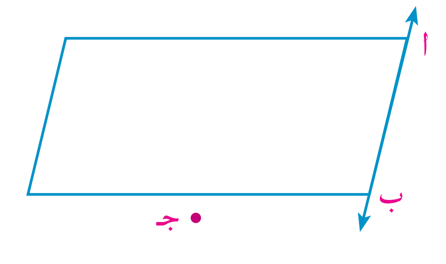
- بِمَ تمثل مدينتك على خريطة جمهورية مصر العربية؟
- كم عدد النقاط التى تكفى لرسم خط مستقيم؟
- ماذا يمثل لك كل من: أرضية الفصل الدراسى - سطح المنضدة - سطح الحائط.
- ماذا يمثل لك كل من: سطح الكرة - سطح قبة المسجد - سطح أسطوانة الغاز.

نشاط

ارسم نقطتين مختلفتين على ورق مقواة مثل أ ، ب.
استخدم المسطرة؛ لتصل النقطتين أ، ب ومدهما على نفس الاستقامة.
حاول أن ترسم مستقيمًا آخر يمر بنفس النقطتين أ، ب هل يمكنك ذلك؟
ماذا نستنتج من هذا النشاط؟

نشاط



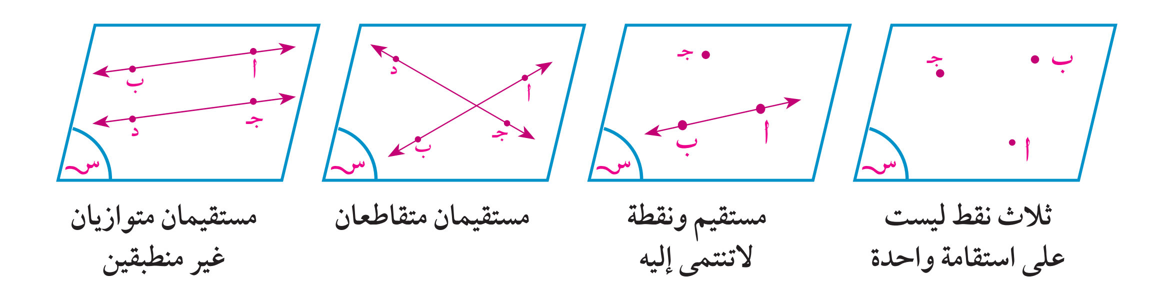
المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ على حافة ورقة بيضاء كما بالشكل الجانبى حرك مستوى الورقة؛ لتدور حول $\overleftrightarrow{أب}$ حتى تنطبق الورقة على نقطة أخرى جـ فى الفراغ.

- كم وضعًا تنطبق فيه النقطة جـ على مستوى الورقة خلال دوران الورقة دورة كاملة؟

مسلمات هندسية:

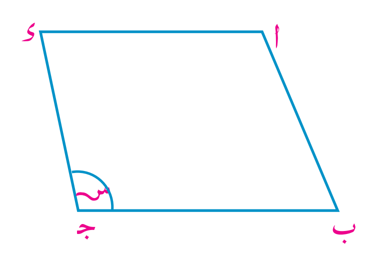
➤ يتحدد الخط المستقيم تحديدًا تامًّا إذا علم عليه نقطتان مختلفتان.

➤ يتحدد المستوى تحديدًا تامًّا بإحدى الحالات الآتية:



ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة — مستقيم ونقطة لاتنتمى إليه — مستقيمان متقاطعان — مستقيمان متوازيان غير منطبقين

➤ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستويات.



المستوى Plane: هو سطح لاحدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح. ففى الشكل الجانبي يرمز للمستوى بالرمز س أو ص أو ع أو.. أو يرمز له بثلاثة أحرف على الأقل مثل أ ب جـ ،.... وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث أو مربع أو مستطيل أو متوازى أضلاع أو دائرة أو...

الفراغ (الفضاء) Space: هو مجموعة غير منتهية من النقاط، وهو الذى يحتوى جميع الأشكال والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

مثال

١ تأمل الشكل المقابل، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ اكتب ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ.

ب اكتب المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

جـ اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ.

د اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

الحل

أ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$

ب $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

جـ أ ب بَ ، أ ب جـ ، أ د دَ

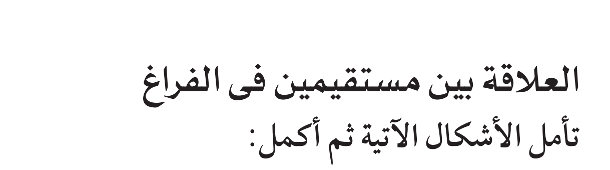
د أ ب بَ، أ ب جـ ، أ ب جـَ دَ

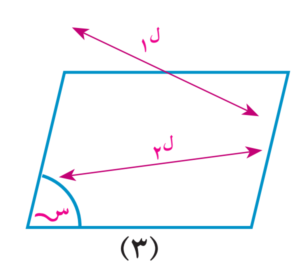
٩ حاول أن تحل

١ تأمل الشكل المقابل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ كم عدد المستقيمات بالشكل؟ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة أ.

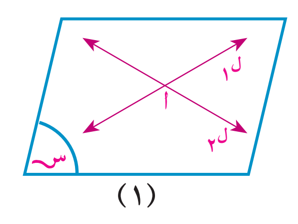
ب كم عدد المستويات بالشكل؟ اذكر ثلاثة منها تمر بالنقطة أ.

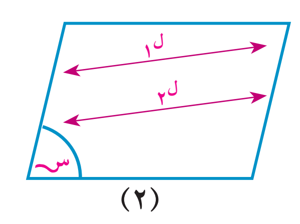




العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ

تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:


(١)


(٢)

(٣)

١- المستقيمان المتقاطعان: هما مستقيمان يقعان فى نفس .... ويشتركان فى ....

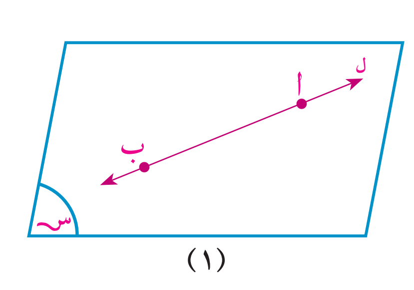
٢- المستقيمان المتوازيان: هما مستقيمان يقعان فى نفس .... ولايشتركان فى ....

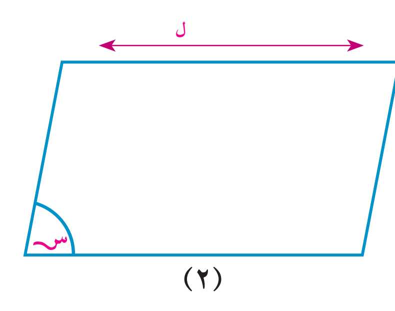
٣- المستقيمان المتخالفان: هما مستقيمان لايمكن أن يحتويهما ....

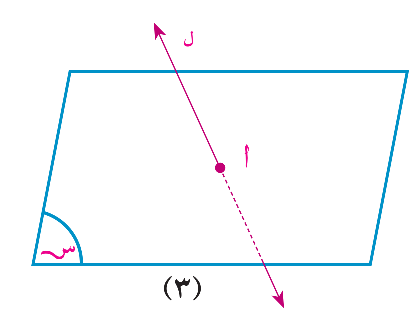
تفكير ناقد: المستقيمان المتخالفان غير متقاطعين وغير متوازيين. فسر ذلك.

العلاقة بين مستقيم ومستوى فى الفراغ

تأمل الأشكال الآتية ثم أكمل:


(١)

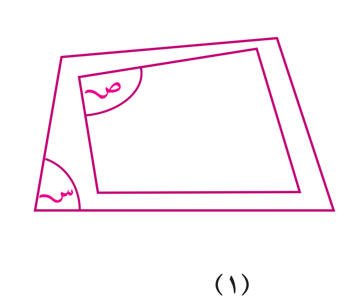

(٢)


(٣)

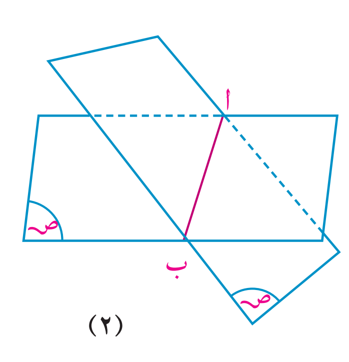
- المستقيم مواز للمستوى كما فى شكل ....
- المستقيم قاطع للمستوى كما فى شكل ....
- المستقيم محتوى فى المستوى كما فى شكل ....

الأوضاع المختلفة لمستويين

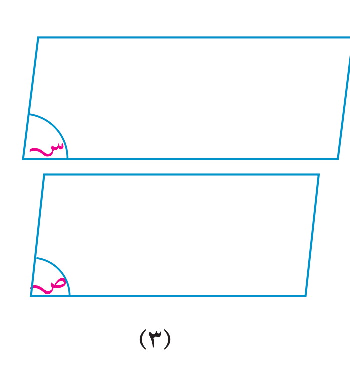
تأمل الأشكال الآتية :



(١)



(٢)

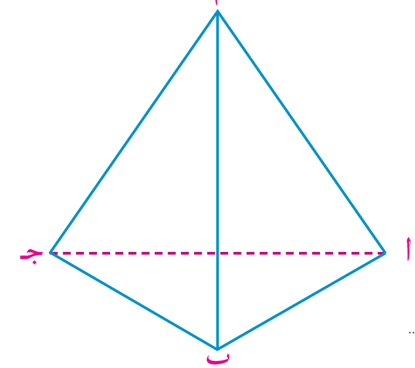


(٣)

- المستويان س ، ص منطبقان كما فى الشكل(١) و يشتركان فى جميع النقط ، س = ص
- المستويان س ، ص متقاطعان كما فى الشكل(٢) و يشتركان فى خط مستقيم ، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
- المستويان س ، ص متوازيان كما فى الشكل (٣) ولا يشتركان فى أى نقطة س ∩ ص = ϕ

مثال

٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:



أ المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ = ...

ب المستوى م ب جـ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

جـ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

د $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ...

هـ المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ ∩ المستوى م أ جـ = ...

الحل

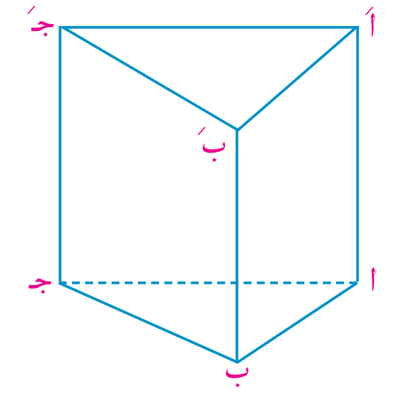


أ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ب $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ جـ {ب}

د ϕ هـ {م}

حاول أن تحل

٢ تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:



أ المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ب جـ جـَ بَ = ...

ب المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أَ بَ جـَ = ...

جـ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أَ جـَ}}$ = ...

د $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = ...

تمـاريـن (٢ - ١)

أكمل مايأتى:

١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، فإن ل ∩ س = ...

٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س فإن ل ∩ س = ...

٣) إذا كان المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$ فإن $ل_١ ∩ ل_٢$ = ...

٤) إذا كان س ، ص مستويان حيث س ∩ ص = ϕ فإن س............ ص

٥) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا .... أو ....

٦) **اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من:**

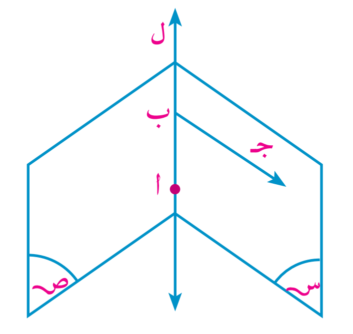
أ) نقطة واحدة معلومة.

ب) نقطتين مختلفتين .

جـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة.

د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

٧) تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز (∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄)



أ) ل .... س

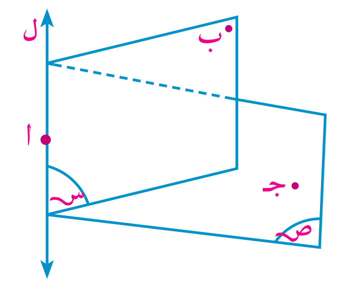
ب) ا .... س

جـ) جـ .... ص

د) $\overleftrightarrow{ب جـ}$ .... ص

٨) **فى الشكل المقابل:**

س ، ص مستويان متقاطعان فى المستقيم ل ، ا ∈ ل ، ب ∈ س ، ب ∉ ص ،
جـ ∈ ص ، جـ ∉ س أكمل مايأتى:

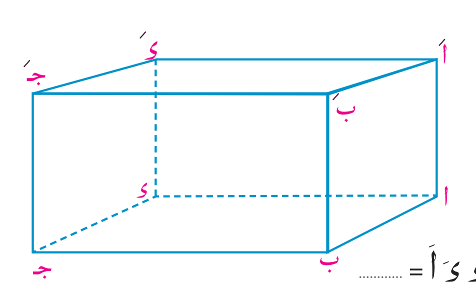


أ) المستوى س ∩ المستوى ا ب جـ = ...

ب) المستوى ص ∩ المستوى ا ب جـ = ...

جـ) المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى ا ب جـ = ...

٩) **تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:**



أ) المستوى ا ب جـ ء // المستوى ....

ب) المستوى ب جـ جَـ بَ // المستوى ....

جـ) المستوى ا ب بَ أَ ∩ المستوى ا ب جـ ء = ...

د) المستوى ا ب بَ أَ ∩ المستوى ء جـ جَـ ءَ = ...

هـ) المستوى ء جـ جَـ ءَ ∩ المستوى ا ب جـ ء ∩ المستوى ا ء ءَ أَ = ...

(١٠) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارات الخاطئة فيما يلي بفرض أن $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان، س،ص مستويان:

أ) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ **فإن** $ل_١ // ل_٢$ **أو** $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان

ب) إذا كان $ل_١ \cap س = \phi$ **فإن** $ل_١ // س$

جـ) إذا كان $ل_٢ \cap س = ل_٢$ **فإن** $ل_٢ \subset س$

د) إذا كان $ل_٢ \subset ص$ **فإن** $ل_٢ \cap ص = \phi$

هـ) إذا كان $س \cap ص = \phi$ **فإن** $س // ص$

و) إذا كان $س = ص$ **فإن** س ، ص منطبقان

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(١١) أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين لنا:

أ) مستويان ب) ثلاث مستويات جـ) اربع مستويات د) لا تعين مستو

(١٢) إذا اشترك مستويان فى نقطتين ا ، ب فإنهما:

أ) متطابقان ب) متقاطعان فى $\overleftrightarrow{اب}$

جـ) متقاطعان فى مستقيم موازٍ $\overleftrightarrow{اب}$ د) يشتركان فى نقطة ثالثة لا تقع على $\overleftrightarrow{اب}$

(١٣) $\overleftrightarrow{اب}$ توازي المستوى س إذا كان

أ) $\overline{اب} \cap س = \phi$ ب) ا ، ب تقعان فى جهتين مختلفتين من س

جـ) ا ، ب على بعدين مختلفين من المستوى س د) $\overleftrightarrow{اب} \cap س = \phi$

(١٤) المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيان إذا كان

أ) $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ ب) $ل_١ \cup ل_٢$ يقعان من مستوى واحد

جـ) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ ، $ل_١$ ، $ل_٢$ يجمعهما مستوى واحد.

د) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ ، $ل_١$ ، $ل_٢$ لا يجمعهما مستوى واحد.

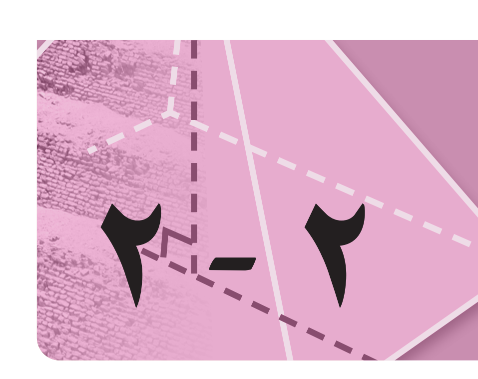
(١٥) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا

أ) غير متوازيين. ب) غير منطبقين.

جـ) لايجمعهما مستوى واحد. د) يقعان فى مستوى واحد.

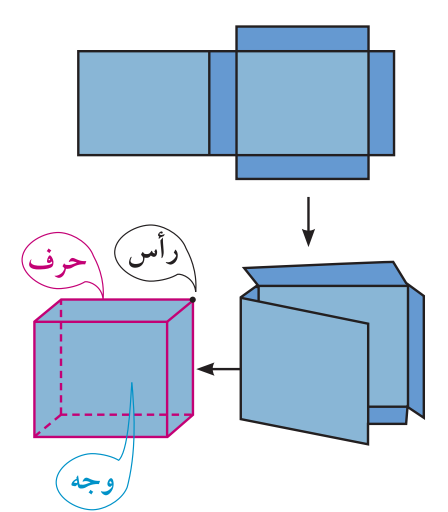
تفكير ابداعى

(١٦) بين بالرسم أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة:



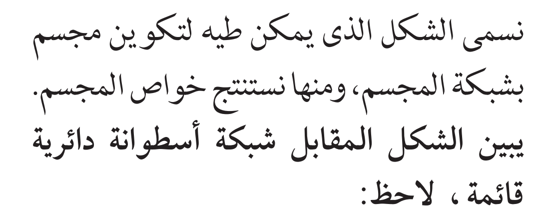
الهرم والمخروط
Pyramid and Cone

فكر و ناقش



تصنع العديد من العبوات بطى ورق الكرتون المسطح إلى أشكال ثلاثية البعد لتعبئة منتجات المصانع قبل تسويقها فتشغل حيزًا من الفراغ ، مثل المكعب ، متوازى المستطيلات ، ...

- كم وجهًا للمكعب؟ وكم رأسًا له؟
- كم حرفًا لمتوازى المستطيلات؟
- هل جميع أوجه المكعب متطابقة؟ فسر إجابتك.



نسمى الشكل الذى يمكن طيه لتكوين مجسم بشبكة المجسم، ومنها نستنتج خواص المجسم.
يبين الشكل المقابل شبكة أسطوانة دائرية قائمة ، لاحظ:

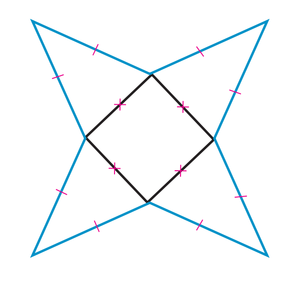
١ - **قاعدتى الأسطوانة** متطابقتين، وكل منهما على شكل دائرة.

٢ - **السطح الجانبى للأسطوانة** قبل طيه هو مستطيل بعداه ٤٤سم ، ١٠سم فيكون ارتفاع الأسطوانة ١٠سم.

ما طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة؟



فكر:



هل يمكنك معرفة اسم المجسم الذى يمكن تكوينه من طى الشبكة المقابلة؟ استنتج بعض خواصه.
هل يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم الواحد؟ فسر إجابتك.

سوف تتعلم

- خواص بعض المجسمات الهرم – الهرم المنتظم – الهرم القائم – المخروط – المخروط القائم.
- مفهوم شبكة المجسم واستنتاج خواص المجسم من شبكته – رسم شبكة مجسم.
- نمذجة و حل مشكلات رياضية و حياتية باستخدام خواص الهرم و المخروط القائم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

هرم	Pyramid
مخروط	Cone
وجه جانبى	Lateral face
حرف جانبى	Lateral edge
ارتفاع	Height
ارتفاع جانبى	Slant hieght
هرم منتظم	Regular pyramid
هرم قائم	Right pyramid
شبكة	Net
مخروط دائرى قائم	Right circular cone

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

الهرم Pyramid

هو مجسم له قاعدة واحدة، وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى هرمًا ثلاثيًّا أو رباعيًّا أو خماسيًّا ... حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته.

لاحظ: فى الشكل المقابل م ا ب جـ ء هـ هرم خماسى ، رأسه م وقاعدته المضلع ا ب جـ ء هـ ، **أوجهه الجانبية** Lateral faces سطوح المثلثات م ا ب، م ب جـ ، م جـ ء ، م ء هـ ، م هـ ا ، **وأحرفه الجانبية** Lateral edges م ا ، م ب ، م جـ ، م ء ، م هـ .

ارتفاع الهرم height (م ن) هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته.

الارتفاع الجانبى Slant height (م س) هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته.

تعريف

الهرم المنتظم *Regular pyramid*

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.



المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس مركزه هو مركز الدائرة المرسومة داخله أو خارجه.

خواص الهرم المنتظم

١ - أحرفه الجانبية متساوية الطول.

٢ - أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

٣ - الارتفاعات الجانبية متساوية.

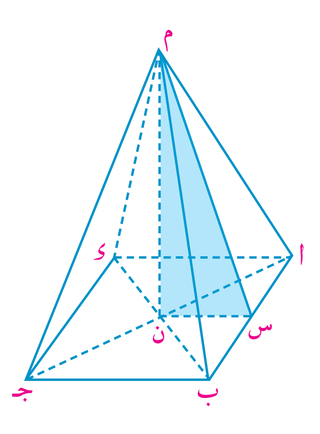
ملاحظة هامة:

المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًّا على أى مستقيم فيها.

ففى الشكل المقابل إذا كان م ن عمودى على مستوى القاعدة فإن:

م ن ⊥ ا جـ ، م ن ⊥ ب ء ، م ن ⊥ ن س ، م ن ⊥ ب جـ ، ....

ويكون المثلث م س ن قائم الزاوية فى ن.





مثال

١) م ا ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٠سم، وارتفاعه ١٢سم ، أوجد ارتفاعه الجانبى .



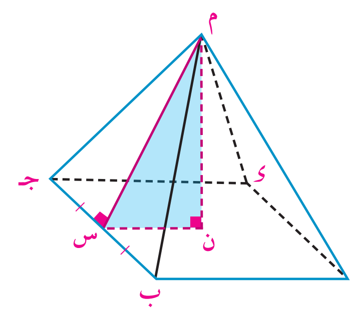
الحل

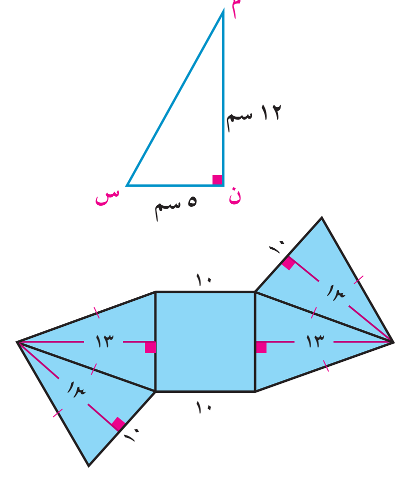
∵ الهرم رباعى منتظم ∴ م ن ⊥ المستوى ا ب جـ ء

حيث ن نقطة تقاطع قطرى المربع ا ب جـ ء ، م ن = ١٢سم

بفرض س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ (لماذا؟)

ويكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم.





فى $\triangle$ ء ب جـ : ن منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ن س = $\frac{1}{2}$ ء جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥سم

∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أب جـ ء

∴ $\triangle$ م ن س قائم الزاوية فى ن

ويكون: (م س)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن س)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٦٩

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٣سم

ويوضح الشكل المقابل إحدى شبكات الهرم م أ ب جـ ء.

٩ حاول أن تحل

① م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٢٠سم، وارتفاعه الجانبى ٢٥سم. أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.

الهرم القائم *Right pyramid*

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فكر:

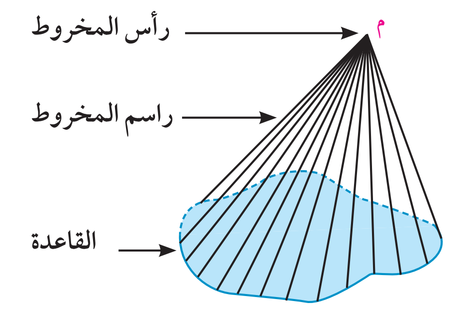
١ - هل الهرم المنتظم هو هرم قائم؟ فسر إجابتك.

٢ - هل الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية؟

ملاحظة هامة: يسمى الهرم الثلاثى المنتظم، **هرمًا ثلاثيًّا منتظم الوجوه**؛ إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع، ويكون أى منها قاعدة له.



المخروط *Cone*

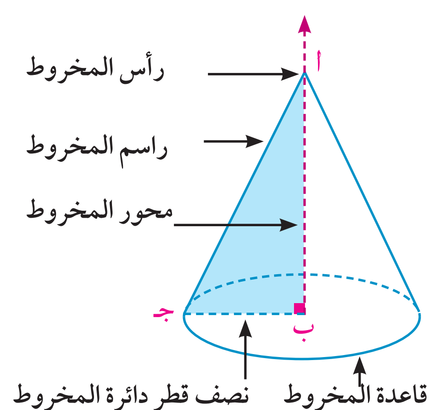


هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته، والتى يعرف كل منها براسم المخروط.

المخروط الدائرى القائم *Right circular cone*

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.

خواص المخروط الدائرى القائم.



يوضح الشكل المقابل مخروطًا دائريًّا قائمًا، ناشئ من دوران المثلث القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ كمحور فنجد:

١- $\overline{\text{أ جـ}}$ راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة جـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط.

٢- $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة ، ارتفاع المخروط يساوى طول $\overline{\text{أب}}$.

مثال

② مخروط دائرى قائم، طول راسمه ١٧سم، وارتفاعه ١٥سم، أوجد طول نصف قطر دائرته.

الحل

باعتبار طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ،

طول نصف قطر دائرة المخروط = نق

∴ نق^2 = ل^2 - ع^2

∴ نق^2 = $(١٧)^2$ - $(١٥)^2$ = ٦٤

∴ نق = ٨ سم

حاول أن تحل

② أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦سم.

فكر: أ ب جـ مثلث ، أب = أجـ ، ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. إذا دار المثلث أ ب جـ نصف دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أى}}$ كمحور.
هل ينشأ مخروط دائرى قائم؟ فسر إجابتك.

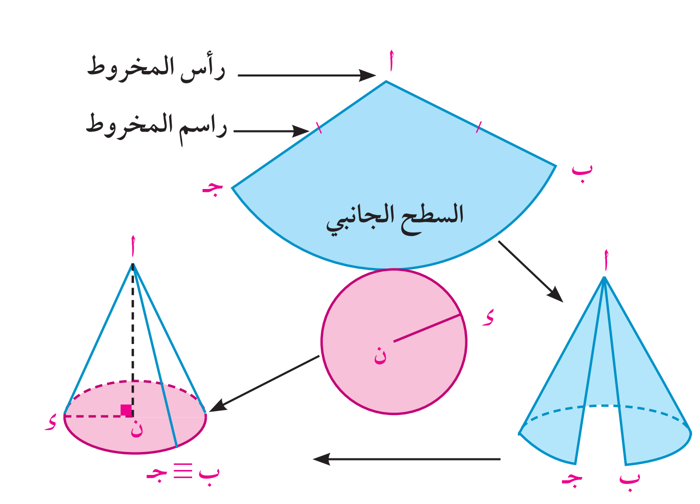
شبكة المخروط القائم:

يمكن طى شبكة المخروط القائم؛ لتكوين عبوات مخروطية الشكل كما فى الشكل المقابل حيث:

١ - أ ب = أجـ = ل (طول راسم المخروط).

٢ - القطاع الدائرى أ ب جـ يمثل السطح الجانبى للمخروط ، طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = ٢ π نق
(نق طول نصف قطر قاعدة المخروط).

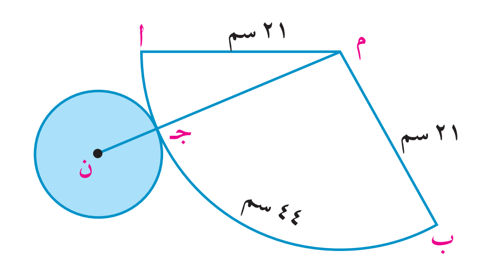
٣ - ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{أ ن}}$.



مثال

③ يوضح الشكل المقابل شبكة مخروط قائم، مستعينًا بالبيانات المعطاة، أوجد ارتفاعه. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)





الحل

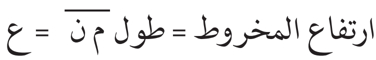
من شبكة المخروط نلاحظ أن:

طول راسم المخروط = طول $\overline{\text{م أ}}$ = ٢١سم

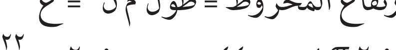
محيط قاعدة المخروط = طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ٤٤سم.

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $\overline{\text{جـ ن}}$ = نق.

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل فيكون:



ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{م ن}}$ = ع



∵ ٢ π نق = ٤٤   ∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤   **أى أن** نق = ٧ سم



∵ ع^{٢} = ل^{٢} - نق^{٢}

∴ ع^{٢} = (٢١)^{٢} - (٧)^{٢} = ١٤ × ٢٨   **أى أن** ع = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع المخروط الدائرى القائم = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم.

حاول أن تحل

(٣) فى الشبكة السابقة للمخروط القائم، إذا كان م أ = ٤١سم ، طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ١٨ π سم أوجد ارتفاع المخروط.

تفكير ناقد: هل العبارة التالية صحيحة: "ارتفاع المخروط القائم > طول راسمه"؟ فسر إجابتك.



تمارين (٢ - ٢)

(١) فى الهرم الخماسى المنتظم:

(أ) ما عدد أوجهه الجانبية.   (ب) ما عدد الأوجه.

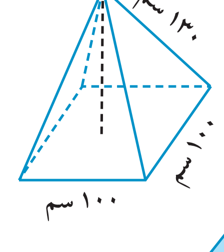
(ج) ما عدد أحرف الجانبية.   (د) ما عدد أحرفه.

(هـ) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟ هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعه. **"عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"**

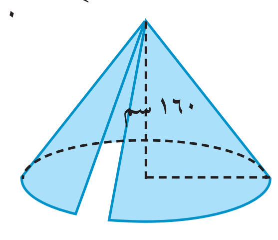
(٢) فى الهرم المنتظم ، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

(أ) طول الحرف الجانبى.   (ب) ارتفاع الهرم.

(ج) الارتفاع الجانبى.

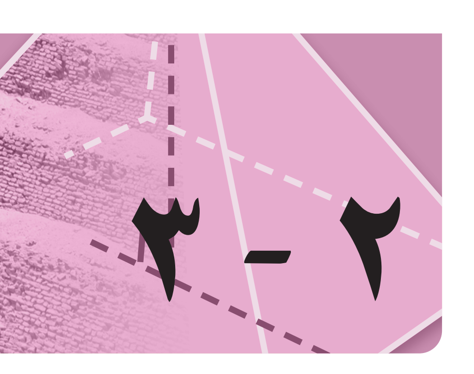


(٣) **هندسة مدنية:** يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًّا من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان .



(٤) **الربط بالجوالة:** خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

(٥) **الربط بالسياحة:** هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا، وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا، أوجد ارتفاع الهرم.



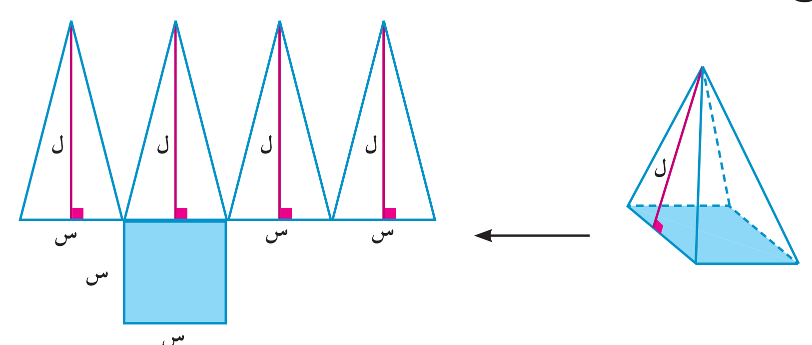
المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط

Surface area of pyramids and cones

سبق أن تعلمت خواص الهرم والمخروط الدائرى القائم، وقمت باستنتاج بعضها من خلال شبكة كل منهما. هل يمكنك حساب المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط الدائرى القائم من شبكتيهما؟ فسر إجابتك.

المساحة الكلية للهرم المنتظم

يوضح الشكل التالى هرمًا رباعيًّا منتظمًا، وإحدى شبكاته.



لاحظ أن: الأوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة الارتفاعات الجانبية متساوية وكل منها = ل

قاعدة الهرم مضلع منتظم طول ضلعه = س ويكون:

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

$= \frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل

$= \frac{1}{2}$ (س + س + س + س) ل

$= \frac{1}{2}$ محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته.



تعلم

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته.

سوف تتعلم

- إيجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن المساحة السطحية لكل من الهرم والمخروط القائم.

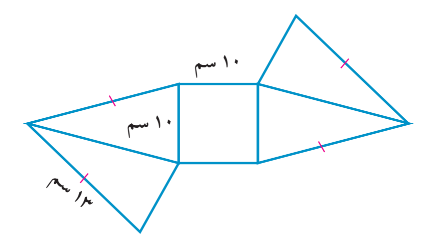
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- المساحة الجانبية Lateral surface area (L.S.A)
- المساحة الكلية (السطحية) Total surface area (T.S.A)

الأدوات والوسائل

- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

مثال



١) باستخدام الشبكة التى أمامك. صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

الحل

الشبكة لهرم رباعى منتظم.

قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم ، طول حرفه الجانبى = ١٣سم.

∵ الوجه الجانبى م أ ب مثلث متساوى الساقين ، $\overline{\text{م هـ}}$ ارتفاع جانبى.

∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ أى أن أ هـ = ٥سم

فى △ م هـ أ القائم الزاوية فى هـ **نجد أن** (م هـ)^2 = (أم)^2 - (أهـ)^2

(م هـ)^2 = (١٣)^2 - (٥)^2 = ١٤٤

∴ م هـ = ١٢سم

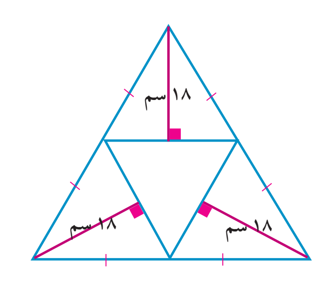
∵ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

∴ المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ × (١٠ × ٤) × ١٢ = ٢٤٠ سم^2

∵ مساحة قاعدة الهرم = (١٠)^2 = ١٠٠سم^2

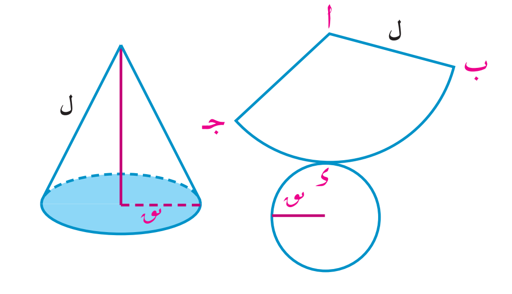
∴ المساحة الكلية للهرم = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠سم^2

حاول أن تحل



١) باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

المساحة الكلية للمخروط القائم



من شبكة المخروط القائم فى الشكل المقابل

مساحة القطاع أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

= $\frac{1}{2}$ ل × محيط قاعدة المخروط

= $\frac{1}{2}$ ل × ٢ π نق = π ل نق

= المساحة الجانبية للمخروط القائم

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته



تعلم

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^2 = π نق (ل + نق)

حيث ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر دائرته.

مثال

٢ أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم ، وارتفاعه ٢٠سم.



الحل

لإيجاد طول راسم المخروط ل

∵ ل^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

∴ ل = ٢٥سم

∵ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق ، نق = ١٥سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = ٢٥ × ١٥ π = ٣٧٥ π سم^{٢}

حاول أن تحل

٢ أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧سم وارتفاعه ١٥سم.

مثال

٣  ملاحة بحرية: يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى، وهى على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.
أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.

الحل

مساحة سطح العلامة الإرشادية = المساحة الجانبية للمخروط الأول + المساحة الجانبية للمخروط الثانى.

المخروط الأول: ل = ٨٠سم ، نق = ٥٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ٨٠π

= ٤٠٠٠ π سم^{٢}

المخروط الثانى: ع = ١٢٠سم، نق = ٥٠ سم ∴ ل$_{٢}$ = $\sqrt{(١٢٠)^{٢}+(٥٠)^{٢}}$ = ١٣٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ١٣٠π

= ٦٥٠٠ π سم^{٢}

مساحة سطح العلامة الإرشادية = (٤٠٠٠ + ٦٥٠٠)π = ١٠٥٠٠ π سم^{٢}

≃ ٣,٢٩٩ متر مربع

تكاليف الطلاء = ٣,٢٩٩ × ٣٠٠ = ٩٨٩,٧ جنيهًا

حاول أن تحل

٣ غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم، احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.





① الشكل المقابل يمثل هرم ثلاثى ، س ، ص، ع ثلاث مستويات أكمل مايأتى :

أ) س ∩ ص = ...

ب) س ∩ ع = ...

ج) ص ∩ ع = ...

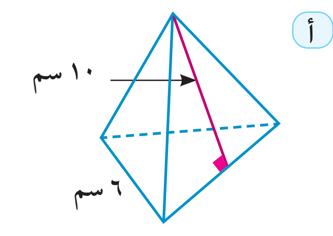
د) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ س = ...

هـ) $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ .... س ، $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ .... ع

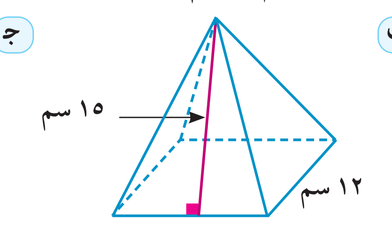
و) س ∩ ص ∩ ع = ...

② أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة.

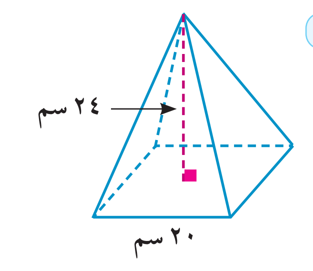
أ)



ب)

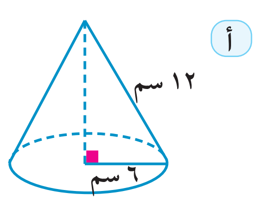


ج)

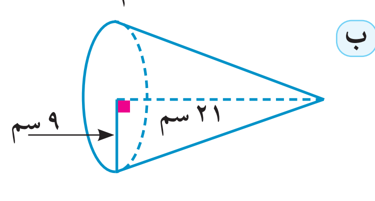


③ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة.

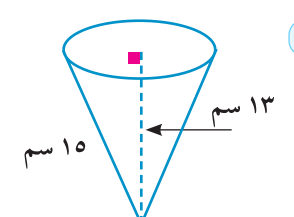
أ)



ب)



ج)



④ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى $١٠\sqrt{٣}$ سم. أوجد:

أ) مساحته الجانبية

ب) مساحته الكلية

⑤ أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم^٢.



حجم الهرم والمخروط القائم

Volumes of pyramids and cones

سوف تتعلم

- إيجاد حجم الهرم المنتظم.
- إيجاد حجم المخروط القائم
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن حجم كل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

رأس	Vertex
قاعدة	Base
وجه	Face
محور	Axis
نصف قطر	Radius
حجم	Volume

الأدوات والوسائل

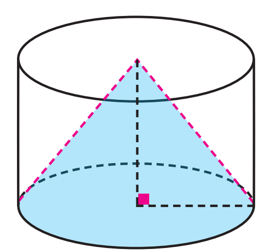
- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب



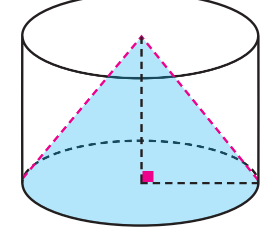
فكر و ناقش

سبق أن تعلمت كيفية حساب حجم المنشور القائم وحجم الأسطوانة الدائرية القائمة.

هل تستطيع تقدير حجم الهرم بدلالة حجم المنشور القائم الذى له نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟



هل تستطيع تقدير حجم المخروط القائم بدلالة حجم أسطوانة لها نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟



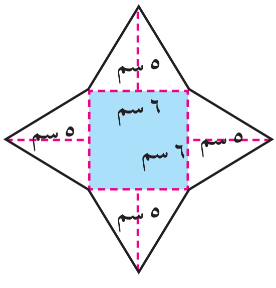
نشاط

المقارنة بين حجمى هرم ومنشور لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع.

١- ارسم على ورق مقوى شبكتى الهرم والمنشور الموضحتين فى الرسم أمامك.

٢- اقطع واطو كل شبكة؛ لتصنع نموذجين أحدهما السطح الجانبى لهرم رباعى، والثانى منشور قائم مفتوح من أعلى.

٣- املأ الهرم بحبات الأرز أو الرمل، وأفرغه فى المنشور، كرر ذلك حتى يمتلئ المنشور تمامًا.



لاحظ أن المحتويات (حبات الأرز أو الرمل) التى تلزمك لملئ المنشور سوف تملأ تمامًا ثلاثة أهرامات.

أى أن حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور الذى له نفس مساحة قاعدة الهرم (ق) ونفس ارتفاع الهرم (ع).

حجم الهرم *Volume of a Pyramid*



تعلم

حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه.

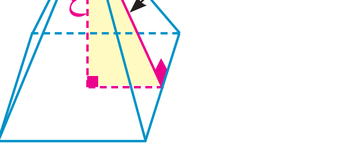
أى أن: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ ق × ع

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم.



مثال

(١) احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم، وارتفاعه الجانبى ١٥سم.





الحل

أولاً: حساب مساحة قاعدة الهرم (ق)

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

مساحة قاعدة الهرم (ق) = ١٨ × ١٨ = ٣٢٤ سم^2

ثانيًا: حساب ارتفاع الهرم (ع)



∵ ع^2 + (٩)^2 = (١٥)^2 فيثاغورث

` ع^2 = (١٥)^2 - (٩)^2 = ١٤٤ ، ع = ١٢ سم

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ ق × ع

` حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم^3

تذكر أن

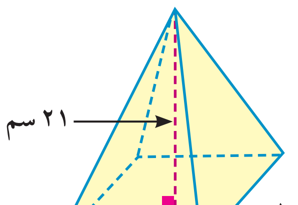
مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ن، وطول ضلعه س تساوى

$\frac{ن}{٤}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

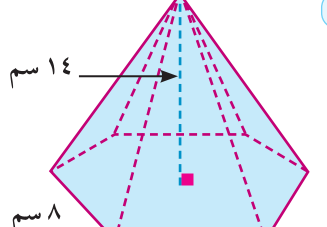
حاول أن تحل

(١) أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة.

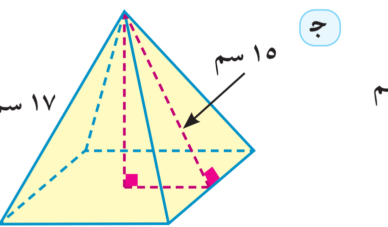
أ

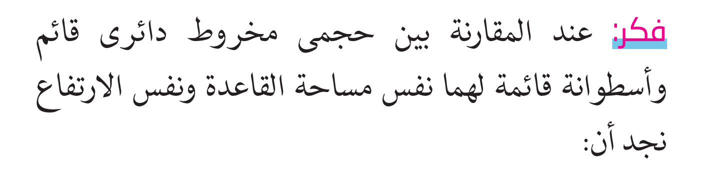


ب

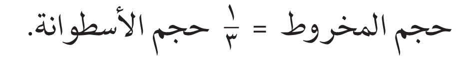


ج

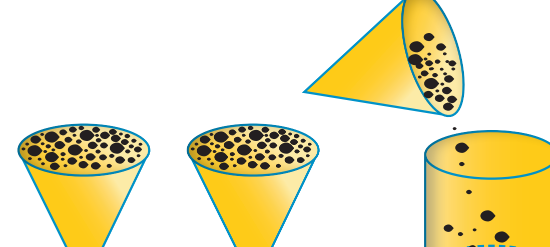




فكر: عند المقارنة بين حجمى مخروط دائرى قائم وأسطوانة قائمة لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع نجد أن:



حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة.



حجم المخروط
Volume of a cone



تعلم

حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه

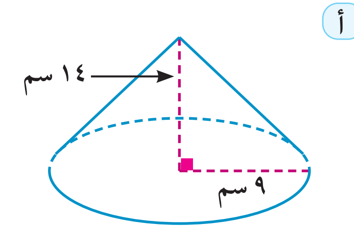
أى أن: **حجم المخروط** = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع

حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ، (ع) ارتفاع المخروط

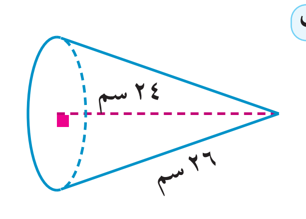
حاول أن تحل

(٢) أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة.

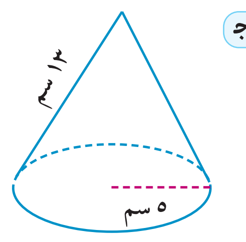
أ



ب



ج



(٣) قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧πسم^{٣} ومحيط قاعدته ٦πسم أوجد ارتفاعه.

مثال

(٢) الربط بالصناعة: هرم خماسى منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠سم، وارتفاعه ٤٢سم، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم، طول نصف قطر قاعدته ١٥سم. فإذا علم أن ١٠٪ من النحاس فُقِدَ أثناء عمليتى الصهر والتحويل، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

$\because$ مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{٥}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٥}$ حيث س طول ضلعه

$\therefore$ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{٥}{٤}$ × ١٠ × ١٠ ظتا ٣٦° = $\frac{١٢٥}{\text{ظا } ٣٦°}$ $\simeq$ ١٧٢سم^{٢}

$\because$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١٧٢}{٣}$ × ٤٢ = ٢٤٠٨سم٣

$\therefore$ حجم النحاس فى المخروط = $\frac{٩٠}{١٠٠}$ × ٢٤٠٨ = ٢١٦٧,٢سم^{٣}

$\frac{\pi}{٣}$ (١٥)^{٢} ع = ٢١٦٧,٢ حيث ع ارتفاع المخروط القائم

$\therefore$ ع = $\frac{٢١٦٧,٢ \times ٣}{٢٢٥\pi}$ $\simeq$ ٩,٢سم

حاول أن تحل

(٤) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

ملاحظة هامة: تقدر سعة حاوية بحجم السائل الذى تحتويه، ولحساب سعتها تستخدم نفس قوانين حساب الحجوم، ووحدة قياس السعة هى اللتر.

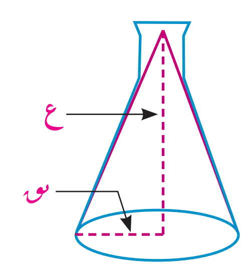
١ لتر = ١٠٠٠ ملليلتر = ١٠٠٠ سم^{٣} = ديسم^{٣}

تذكر أن

السعة هى حجم الفراغ الداخلى لأى جسم أجوف

مثال

٣ الربط بالكيمياء: دورق مخروطى الشكل سعته ١٥٤ مل. ارتفاعه ١٢سم أوجد طول نصف قطر قاعدته ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$) .



الحل

سعة الدورق = حجم المخروط القائم = ١٥٤سم^{٣}

$\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق^{٢} $\times$ ١٢ = ١٥٤ ∴ نق^{٢} = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ نق = ٣,٥سم



تمارين (٢ – ٤)

١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم، وحجمه ٣٠٠سم^{٣}. أوجد طول ضلع قاعدته.

٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^{٢}، وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

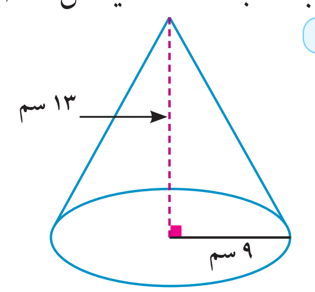
٥) أيهما أكبر حجمًا؟ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

٦) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

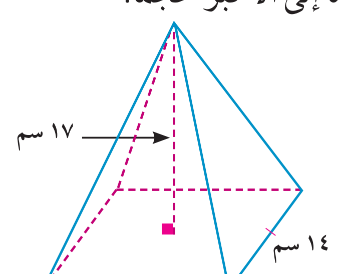
٧) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، مساحته الجانبية ٢٢٠سم وطول راسمه ١٤سم.

٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.

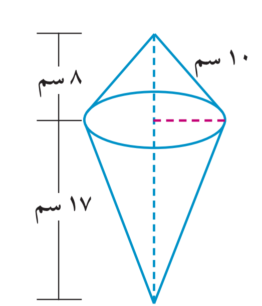
أ



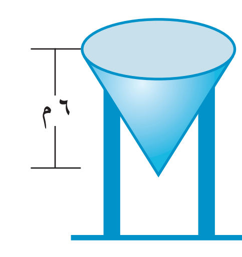
ب



ج



٩) هندسة مدنية: صهريج مياه على شكل مخروط قائم، حجمه ٣٢ π م^{٣} وارتفاعه ٦م.
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.



١٠) يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول:

أ) محور السينات .

ب) محور الصادات.

ص
أ
٢
ب
-٢
و
٢
٤
س



معادلة الدائرة

Equation of a circle

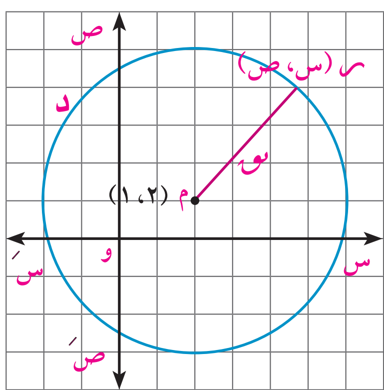
تمهيد

علمت أن الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويرمز لها عادة بالرمز م، كما يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز نق كما يرمز للدائرة عادة بالرمز **د**.

معادلة الدائرة:

معادلة الدائرة هى علاقة بين الإحداثى السينى والإحداثى الصادى لأى نقطة تنتمى للدائرة، وكل زوج مرتب (س ، ص) يحقق هذه العلاقة (المعادلة) يمثل نقطة تنتمى إلى هذه الدائرة.



فى مستوى إحداثى متعامد إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمى لدائرة **د** طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات ومركزها النقطة م (٢ ، ١) فإن:

م ر = نق = ٤

وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين تكون:

$$(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = (٤)^٢$$

$$\therefore (س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$$

هى معادلة الدائرة **د**

تذكر أن

البعد بين النقطتين $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$

$$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الدائرة بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- تعين إحداثيى مركز دائرة وطول نصف قطرها. من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دائرة Circle
- مركز Center
- نصف قطر Radius
- قطر Diameter
- مستوى إحداثى Cartesian plane
- معادلة Equation
- صورة عامة General Form

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق مربعات

تعلم

معادلة الدائرة *The equation of a circle*

(بدلالة إحداثيي مركزها وطول نصف قطرها)

فى مستوى إحداثى متعامد:

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمى إلى دائرة **د** مركزها النقطة (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى **نق** من الوحدات، فإن معادلة الدائرة **د** هى:

(س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}



مثال

١ اكتب معادلة الدائرة **د** مركزها النقطة م (٥ ، ٢)، وطول نصف قطرها يساوى ٦ وحدات.

الحل

بفرض أن النقطة ر (س ، ص) ∈ الدائرة **د**

∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٢) ، طول نصف قطر الدائرة = ٦ وحدات

∴ ى = ٥ ، هـ = ٢ ، نق = ٦

وتكون معادلة الدائرة هى (س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = (٦)^{٢} أى: (س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٣٦

حاول أن تحل

١ اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها:

أ م (٤ ، -٣) ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

ب م (٧ ، -١) ، وطول قطرها يساوى ٨ وحدات.

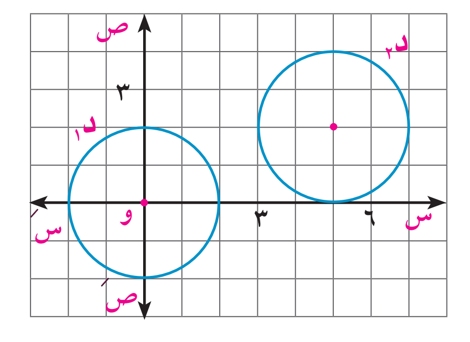
جـ م (٢ ، ٠) ، وطول قطرها يساوى $\sqrt{٢٨}$ من الوحدات.

د م (٠ ، -٥) ، وتمر بالنقطة أ(-٢ ، -٩)

هـ نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات.

مثال

٢ يبين الشكل المقابل الدائرتين د$_{١}$ ، د$_{٢}$ أثبت أن الدائرتين متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما.





الحل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

الدائرة د$_{١}$: مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها نق$_{١}$ = ٢ وحدة.

الدائرة د$_{٢}$: مركزها (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها نق$_{٢}$ = ٢ وحدة

∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

وتكون: معادلة $د_١$ $س^٢ + ص^٢ = ٤$ ، معادلة $د_٢$ $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

لاحظ: الدائرة $د_٢$ هى صورة الدائرة $د_١$ بالانتقال (٥ ، ٢)

تذكر أن

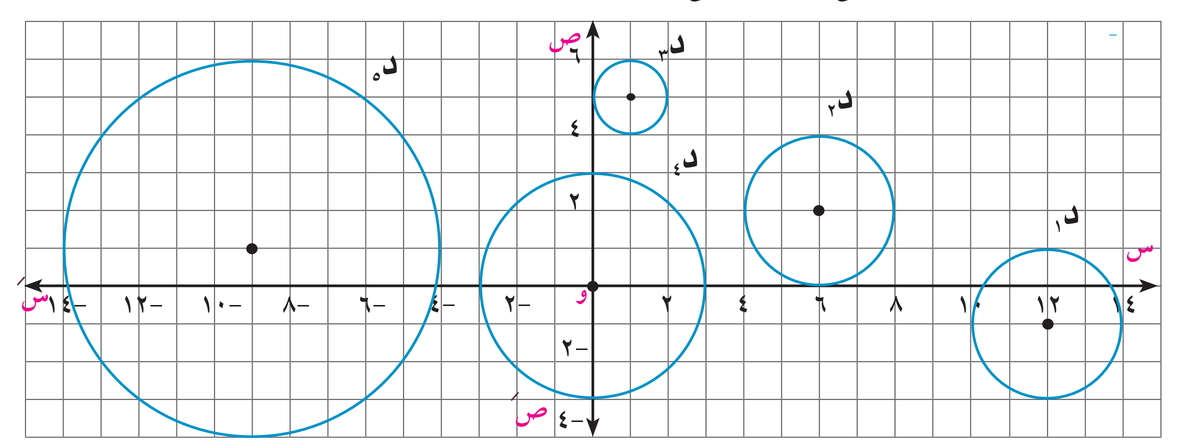
صورة النقطة (ى ، هـ) بالانتقال (م، ن) هى (ى+م ، هـ + ن)

تفكير ناقد: إذا كانت الدائرة $د_٣$ هى صورة الدائرة $د_١$ بالانتقال (-٤ ، ٣)

فاكتب معادلة الدائرة $د_٣$.

حاول أن تحل

٢ أ اكتب معادلة كل دائرة فى الشكل التالى



ب أى الدوائر السابقة متطابقة؟ فسر إجابتك.

فكر: أين تقع النقطة ($س_١$، $ص_١$) بالنسبة للدائرة د: $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ إذا كان:

أ $(س_١ - ى)^٢ + (ص_١ - هـ)^٢ < نق^٢$ ب $(س_١ - ى)^٢ + (ص_١ - هـ)^٢ > نق^٢$

مثال

٣ بين أن النقطة (٤ ، -١) هى إحدى نقط الدائرة **د** التى معادلتها: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٣٧$

الحل

بالتعويض بإحداثيي النقطة (٤ ، -١) فى الطرف الأيمن لمعادلة الدائرة.

∴ $(٤ - ٣)^٢ + (-١ - ٥)^٢ = ١ + ٣٦ = ٣٧$ = الطرف الأيسر

∴ النقطة (٤ ، -١) تنتمى إلى الدائرة **د**

لاحظ أن: للنقطة ($س_١$، $ص_١$) فى مستوى الدائرة

إذا كان $(س_١ - ٣)^٢ + (ص_١ - ٥)^٢ > ٣٧$ فإن النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تقع خارج الدائرة **د**.

و إذا كان $(س_١ - ٣)^٢ + (ص_١ - ٥)^٢ < ٣٧$ فإن النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تقع داخل الدائرة **د**.

حاول أن تحل

٣ بين أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها: $(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة **د** حيث:

أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ(٣ ، ٣) ، ى(٢ ، -٣)

تذكر أن

إحداثى منتصف المسافة بين النقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

مثال

٤ اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أ ب}$ حيث أ(٢ ، -٧) ، ب(٦ ، ٥)

الحل

بفرض أن النقطة م(ى ، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{أ ب}$ ، فتكون النقطة م منتصف $\overline{أ ب}$

∴ احداثيا م: $ى = \frac{٢ + ٦}{٢} = ٤$ ، $هـ = \frac{-٧ + ٥}{٢} = -١$

، $نق^٢ = (أ م)^٢ = (٤ - ٢)^٢ + [-١ - (-٧)]^٢$

$= (٢)^٢ + (٦)^٢ = ٤٠$

وتكون معادلة الدائرة هى: $(س - ٤)^٢ + [ص - (-١)]^٢ = ٤٠$

أى $(س - ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤٠$

فكر: هل تحقق النقطة (٦ ، ٥) معادلة الدائرة؟ لماذا؟

هل تنتمى النقطة (٦ ، -٧) للدائرة السابقة فسر إجابتك.



حاول أن تحل

٤ اكتب معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٧)، وتمر بالنقطة أ (٢ ، ١٠)

ب مركزها النقطة م (٥ ، ٤)، وتمس المستقيم س = ٢



مركزها م يقع فى الربع الأول من المستوى الإحداثى، وطول نصف قطرها يساوى ٣ وحدات، والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

مثال

٥ أوجد إحداثيي المركز، وطول نصف قطر كل من الدائرتين:

أ $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٧$ ب $(س + ١)^٢ + ص^٢ = ١٦$

الحل

نعلم أن معادلة الدائرة بدلالة إحداثيي المركز (ى ، هـ) وطول نصف قطرها نق هى:

$(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

بمقارنة كل مقدار جبرى فى المعادلة بنظيره فى المعادلات المعطاة نجد:

أ $س - ى = س - ٢$ ∴ $ى = ٢$

$ص - هـ = ص + ٣$ ∴ $هـ = -٣$

$نق^٢ = ١٧$ ∴ $نق = \sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة.

ب) س - ى = س + ١ ∴ ى = -١

ص - هـ = ص ∴ هـ = ٠

نق^{٢} = ١٦ ∴ نق = ٤

∴ مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات.

حاول أن تحل

٥) أى من الدوائر المعطاة يمثل دائرة مركزها (٣ ، -٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

أ) (س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩ ب) (س + ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩

جـ) (س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩ د) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩

٦) أوجد إحداثى المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:-

أ) (س - ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٥ ب) س^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩

جـ) (س + ١)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = $\frac{٣}{٤}$ د) (س + ١)^{٢} = ١٣ - ص^{٢}

تعلم

الصورة العامة لمعادلة الدائرة *General form of the equation of a circle*

علمت أن معادلة الدائرة التى مركزها (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات:

هى: (س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢} بفك الأقواس

∴ س^{٢} + ص^{٢} - ٢ ى س - ٢هـ ص + ى^{٢} + هـ^{٢} - نق^{٢} = صفر (١)

∵ ى ، هـ ، نق ثوابت ∴ المقدار ى^{٢} + هـ^{٢} - نق^{٢} = جـ حيث (جـ مقدار ثابت)

بوضع ل = -ى ، ك = -هـ ، جـ = ى^{٢} + هـ^{٢} - نق^{٢}

تصبح المعادلة (١) على الصورة

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

وتسمى بالصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (-ل ، -ك) وطول نصف قطرها يساوى نق حيث

نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠

مثال

٦) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٦ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

الحل

∵ مركز الدائرة (-ل ، -ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

، مركز الدائرة (٦ ، -٣) معطى

∴ ل = -٦ ، ك = ٣

∵ نق = ٥ ، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

∴ جـ = $(-٦)^٢ + (٣)^٢ - (٥)^٢$ = ٢٠

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى: $س^٢ + ص^٢ - ١٢س + ٦ص + ٢٠$ = صفر.

يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام معادلة الدائرة: $(س - ٦)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$ ثم تبسيطها ومقارنة النتائج

حاول أن تحل

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٥)، وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{٥٧}$ وحدة.

ب مركزها النقطة ن (٥ ، -٣)، وتمر بالنقطة ب (٢ ، ١).

مثال

٧ اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة إذا كانت النقطتان أ(٤ ، ٢) ، ب(-١ ، -٣) طرفى قطر فيه.

الحل

بفرض ان النقطة م (-ل ، -ك) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$

∴ م منتصف $\overline{أب}$ ويكون إحداثيا النقطة م هما $(\frac{٤-١}{٢} ، \frac{٢-٣}{٢})$

∴ -ل = $\frac{٣}{٢}$ أى ل = $\frac{-٣}{٢}$

- ك = $\frac{-١}{٢}$ أى ك = $\frac{١}{٢}$

بالتعويض عن ل ، ك فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$

∴ $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ص + جـ = ٠$ (١)

∵ الدائرة تمر بالنقطة أ(٤ ، ٢) فهى تحقق معادلتها

∴ $(٤)^٢ + (٢)^٢ - ٣(٤) + ٢ + جـ = ٠$ أى جـ = -١٠

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ص - ١٠$ = صفر

حاول أن تحل

٨ إذا كانت النقط أ(٣ ، -٢) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (-١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة. فأثبت أن $\overline{أب}$ قطر فيها، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

ملاحظة هامة

من الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$ نستنتج أن

أولًا: المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص

ثانيًا: معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة

ثالثًا: خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠

ولكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة

وأن يكون $ل^٢ + ك^٢ - جـ > ٠$



تعلم

تعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها

لتعيين إحداثيي مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها:

١- تحقق أولًا من وضع المعادلة فى الصورة العامة **حيث** معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة

٢- احداثيا المركز (-ل ، -ك) **أى** $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

٣- طول نصف قطر الدائرة يساوى نق **حيث** نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$ ، $ل^٢ + ك^٢ - جـ > ٠$

مثال

٨ أى المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة فأوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $٣س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٨ص - ١٠ = ٠$

ب $س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٢٥ = ٠$

جـ $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ١٢س + ٨ص - ٣٠ = ٠$

د $٤س^٢ + ٤ص^٢ = ٤٩$

هـ $س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = صفر$

الحل

أ معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢$ ∴ المعادلة لا تمثل دائرة

ب معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ك = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ، جـ = ٢٥

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = (٢)^٢ + (٠)^٢ - ٢٥ < ٠$ ∴ المعادلة لا تمثل دائرة حقيقية

جـ بقسمة طرفى المعادلة على ٢ ∴ $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ١٥ = ٠$

∴ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = -٣ ، ك = ٢ ، جـ = -١٥

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = (-٣)^٢ + (٢)^٢ - (-١٥) = ٢٨ > ٠$

∴ المعادلة لدائرة مركزها (٣ ، -٢) ، نق = $\sqrt{٢٨} = ٢\sqrt{٧}$ وحدة

د بقسمة طرفى المعادلة على ٤ ∴ $س^٢ + ص^٢ = \frac{٤٩}{٤}$

∴ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = ٠ ، ك = ٠ ، جـ = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = \frac{٤٩}{٤} > ٠$ ∴ المعادلة لدائرة مركزها نقطة الأصل ، نق = $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٧}{٢}$ وحدة

هـ المعادلة تحتوى على س ص ∴ المعادلة لا تمثل دائرة

حاول أن تحل

٩ أى المعادلات الآتية تمثل دائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة، أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص + ١٧ = ٠$

ب $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص = ٠$

جـ $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س + ٣٩ = ٠$

د $س^٢ + ص^٢ - ٢س ص - ٦ = ٠$

تفكير ناقد: هل الدائرتان د$_١$: س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠

د$_٢$: س^٢ + ص^٢ + ١٤س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠ متماستان من الخارج؟ فسر إجابتك.

تمارين (٢ - ٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) النقطة (٢ ، ٠) تقع على

أ) محور السينات ب) محور الصادات ج) المستقيم ص = ٢س د) الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٩

٢) إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثيي النقطة التى تنصف $\overline{\text{أ ب}}$ هما

أ) (٠ ، ١) ب) (١ ، ٠) ج) (٠ ، -١) د) (-١ ، ٠)

٣) المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (١٠ ، -٢) تساوى

أ) ٩ ب) ١٠ ج) ٣$\sqrt{١٠}$ د) ٦

٤) الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٥ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة

أ) (١ ، ٤) ب) (٥ ، ٠) ج) (٢٥ ، ٠) د) (٥ ، ١)

٥) معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-

أ) (س - ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩ ب) (س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩

ج) (س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩ د) (س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩

٦) محيط الدائرة التى معادلتها س^٢ + ص^٢ = ٨

أ) ٨ π ب) ٦٤ π ج) ٢$\sqrt{٢}$ π د) ٤$\sqrt{٢}$ π

٧) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها نق إذا كان:

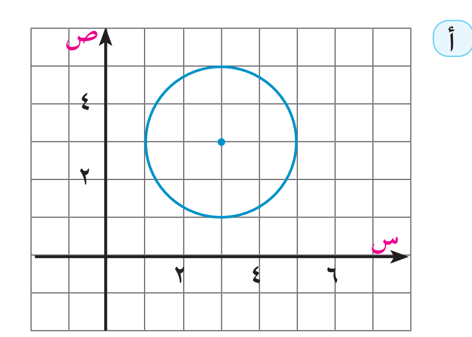
أ) م (٢، ٣) ، نق = ٥ ب) م(٠ ، ٠) ، نق = ٤

ج) م (٣، ٠) ، نق = ٦ د) م(٤ ، -٥) ، نق = $\sqrt{٧}$

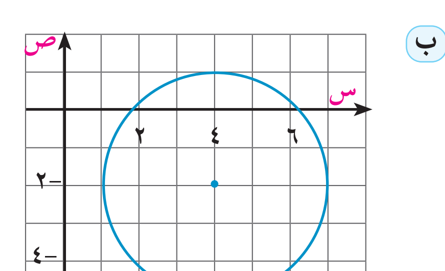
هـ) م (٠، -١) ، نق = ٢$\sqrt{٣}$ و) م(-٤ ، -٣) ، نق = $\frac{٣}{٢}$

٨ اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

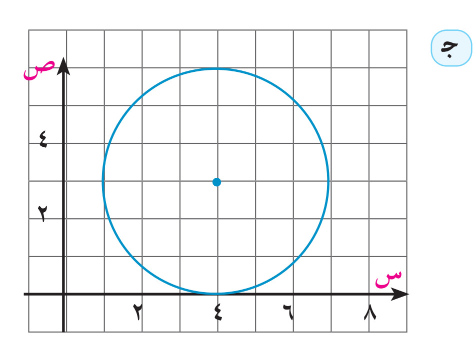
أ



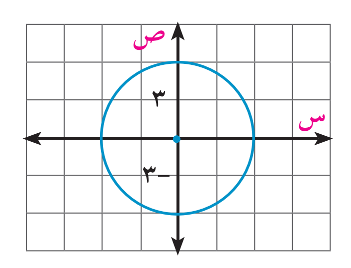
ب



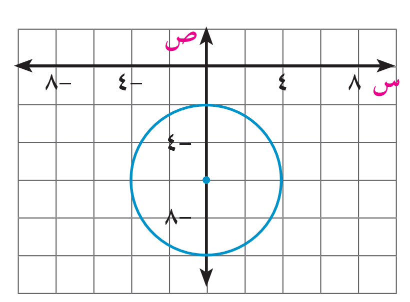
جـ



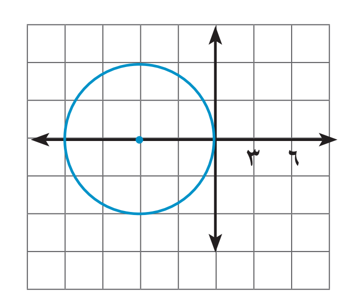
د



هـ



و



٩ أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).

ب $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).

جـ مركزها النقطة (٥ ، -٣)، وتمس محور السينات.

١٠ أوجد إحداثيي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٧$

ب $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤٩$

جـ $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

د $س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٢٤$

١١ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:

أ مركزها م(٣ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨.

ب مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)

جـ مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤)

د $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١)

١٢ أوجد إحداثيي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية

أ س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٢س = ٨
ج س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ١٠ص = ٠
د س^{٢} + ص^{٢} - ٨س = ١٢

١٣ بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان

أ س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ١١ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} - ١٤س + ٣٧ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٠س + ١٣ = ٠

١٤ بين أى المعادلات الآتية تمثل دائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

أ س^{٢} +ص^{٢} + ٨س - ١٦ص -١ = ٠
ب س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٦س - ٥ص = ٠
ج $\frac{١}{٤}$س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ص^{٢} + س - ٨ = ٠
د س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص - ١٢ = ٠
هـ س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠
و ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٣ص - ٨ = ٠

١٥ تفكير ابداعى: أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات.